

ESPACES VECTORIELS

2.1 Introduction

Nous avons vu en première année la notion de sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^n$. Par exemple, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de taille $n \times p$ forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p . L'objectif de ce chapitre est de généraliser cette notion à des espaces E différents de \mathbb{R}^n .

Pour pouvoir réaliser cette généralisation à un espace E , nous devons être capable de définir, comme dans \mathbb{R}^n , une addition interne que l'on notera "+" ainsi qu'une multiplication externe, notée ".".


EXEMPLE. Prenons par exemple $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dans lequel nous avons les deux opérations suivantes :

- une opération d'addition interne, notée "+", qui permet d'ajouter deux matrices $A, B \in E$ telles que $A + B \in E$.
- une opération de multiplication externe, notée ".", qui permet de multiplier une matrice $A \in E$ par un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda.A \in E$.

REMARQUE 2.1.

On parle de multiplication externe car dans le produit λA avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on voit bien que λ est externe à E .

Dans cet espace $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une matrice sera considérée comme **un vecteur de E** et l'expression $2.A - 3.B$ une combinaison linéaire de A et de B .

 Attention, une multiplication interne aux matrices existe dans certains cas. Cependant, nous savons qu'il n'est en général pas possible de multiplier deux matrices de $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ puisque, pour pouvoir effectuer le produit de deux matrices, le nombre de colonnes de la première doit être égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

DÉFINITION 2.1 (Espace vectoriel)

On dit que E est un espace vectoriel si E est muni d'une addition interne "+" et d'une multiplication externe "." de sorte que l'on ait la propriété de stabilité suivante :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v} \in E.$$

On dira dans ce cas que E est stable par combinaisons linéaires.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs de E** .

EXEMPLES. • $E = \mathbb{R}^n$ est muni des deux opérations "+" et "." et il est stable vis à vis de ces deux opérations.

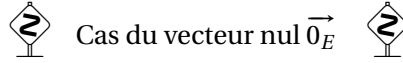
- $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est muni des deux opérations "+" et "." et il est stable vis à vis de ces deux opérations.
- $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M \text{ est inversible}\}$ est muni des deux opérations "+" mais il n'est pas stable par "+".

En effet, par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ sont inversibles mais $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

PROPRIÉTÉ 2.2 (Espaces vectoriels de référence)

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$: l'ensemble des n -uplets de réels.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices de taille $n \times p$.
- $\mathbb{R}_n[x]$: l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus n .



Cas du vecteur nul $\vec{0}_E$

Le vecteur nul apparaît de nombreuses fois dans les calculs, il est donc important de bien l'identifier suivant l'espace dans lequel on travaille pour ne pas faire de confusion :

- Dans $E = \mathbb{R}^n$, le vecteur $\vec{0}_E$ est $\vec{0}_E = (0, \dots, 0)$.
- Dans $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le vecteur $\vec{0}_E$ est la matrice nulle $\vec{0}_E = 0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $E = \mathbb{R}_n[x]$, le vecteur $\vec{0}_E$ est la fonction polynomiale nulle $\vec{0}_E : x \mapsto 0$.

REMARQUE 2.2.

Pour plus clarté, on va progressivement apprendre à ne plus écrire les flèches et ainsi écrire u, v ou 0_E au lieu de \vec{u}, \vec{v} ou $\vec{0}_E$.

2.2 Combinaisons linéaires**DÉFINITION 2.3**

Soit E un espace vectoriel et soient u_1, \dots, u_n et u des vecteurs de E .

On dit que u est **combinaison linéaire** des vecteurs (u_1, \dots, u_n) s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

Notation compacte : $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i$.

EXERCICE 2.1. Dans \mathbb{R}^3

Soient $u_1 = (1, 1, -1)$ $u_2 = (1, -1, 1)$ $u_3 = (0, 0, 1)$ et $u = (4, 1, -2)$

Montrer que u est combinaison linéaire des vecteurs (u_1, u_2, u_3) .

EXERCICE 2.2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que U est combinaison linéaire de la famille (A, B, C, D) .

EXERCICE 2.3. Dans $\mathbb{R}_3[x]$

$P_1(x) = 2$; $P_2(x) = x + 1$; $P_3(x) = x^2 - 1$; $P_4(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ et $P = 3x^3 - x^2 + 4x - 1$

Montrer que P est combinaison linéaire de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) .

Méthode 1 : Montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

Pour montrer qu'un vecteur u est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs (u_1, \dots, u_p) , on procède par analyse et synthèse :

1. Analyse :

- (a) on écrit u comme combinaison linéaire $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$
- (b) on en déduit un système linéaire d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- (c) on résout ce système linéaire.

2. Synthèse :

- (a) si le système admet au moins une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ alors on vérifie que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ et on peut affirmer que u est combinaison linéaire (u_1, \dots, u_p)
- (b) si le système n'admet pas de solution, alors u n'est pas combinaison linéaire (u_1, \dots, u_p) .

2.3 Sous-espace vectoriel**DÉFINITION 2.4**

Soit E un espace vectoriel.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est non-vidé
- $F \subset E$
- F est stable par combinaisons linéaires : $\forall (u, v) \in F^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda u + \mu v \in F$.

REMARQUE 2.3. 1. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors il existe un vecteur $u \neq 0_E$ dans F .

Ainsi, par stabilité par combinaisons linéaires, on a $u - u \in F$ et donc $0_E \in F$.

Dans la définition précédente, on peut donc remplacer la condition " F non vide" par " $0_E \in F$ ".

2. $F = \{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est en quelque sorte "le plus petit" sous-espace vectoriel de E . En effet, la remarque précédente montre que tout sous-espace vectoriel de E contient $\{0_E\}$.

EXERCICE 2.4. Dans \mathbb{R}^3

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 2.5. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.6. Dans $\mathbb{R}_2[x]$

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2P(x) - xP'(x) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sous-espace vectoriel engendré**DÉFINITION 2.5**

Soit E un espace vectoriel et soient u_1, \dots, u_p des vecteurs de E .

L'ensemble des combinaisons linéaires de (u_1, \dots, u_p) est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille (u_1, \dots, u_p) . On note cet espace :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

PROPRIÉTÉ 2.6

Soit (u_1, \dots, u_p) des vecteurs de E . Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, alors F est un sous-espace vectoriel de E .

EXERCICE 2.7. Dans \mathbb{R}^3

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$. Montrer qu'il existe des vecteurs u_1 et u_2 de E tels que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

EXERCICE 2.8. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a & b & -a \\ c & 2c & a \\ b & b+c & b-c \end{pmatrix} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels} \right\}$.

Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.9. Dans $\mathbb{R}_2[x]$

Soient $F = \{P : x \mapsto ax^2 + b / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{P : x \mapsto ax^2 - 2ax + a / a \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$.

Méthode 2 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , il faut déjà qu'il soit inclus dans un des espaces vectoriels de référence. Ensuite, il y a 2 méthodes :

1. en montrant que F est stable par combinaisons linéaires : $\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda u + \mu v \in F$.
2. en montrant que $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Cette méthode présente l'avantage d'exhiber de cette manière une famille génératrice de F .

PROPRIÉTÉ 2.7 (Utile en pratique)

Soient (u_1, \dots, u_p) des vecteurs de E et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathbf{u}_1, u_2, \dots, u_p) &= \text{Vect}(\lambda \mathbf{u}_1, u_2, \dots, u_p) && \text{si } \lambda \text{ est non nul.} \\ \text{Vect}(\mathbf{u}_1, u_2, \dots, u_p) &= \text{Vect}(\mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_i, u_2, \dots, u_p) && \text{pour tout entier } i \in \llbracket 2, p \rrbracket \\ \text{Vect}(\mathbf{u}_1, u_2, \dots, u_p) &= \text{Vect}(u_2, \dots, u_p) && \text{si } \mathbf{u}_1 \text{ est combinaison linéaire de } u_2, \dots, u_p. \end{aligned}$$

EXEMPLE.

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

EXERCICE 2.10.

1. Montrer que $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)$
2. Montrer que $\text{Vect}((2, -1, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)) = \mathbb{R}^3$
3. Montrer que $\text{Vect}((2x - 1, -4x + 1, 2x^2 - 1)) = \mathbb{R}_2[x]$.

2.4 Famille génératrice

DÉFINITION 2.8

Soit E un espace vectoriel et soient u_1, \dots, u_p des vecteurs de E .

On dit que (u_1, \dots, u_p) est une **famille génératrice de E** si

tout vecteur de E est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p .

Traduction mathématiques : $\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.

Autrement dit :

PROPRIÉTÉ 2.9 (Méthode 3)

(u_1, \dots, u_p) est une famille génératrice de $E \iff E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

EXERCICE 2.11. Dans \mathbb{R}^4

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et déterminer une famille génératrice de F .

EXERCICE 2.12. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ b & a+b+c & a \\ c & a & a+b+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de F .

EXERCICE 2.13. Dans $\mathbb{R}_2[x]$

Soit $F = \{P : x \mapsto ax^2 + 2(b-a)x + a + b \in \mathbb{R}_2[x] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer une famille génératrice de F .

2.5 Famille libre

Une famille génératrice d'un (sous) espace vectoriel E permet d'écrire tout vecteur de E à l'aide d'un nombre fini de vecteurs. Si les vecteurs de cette famille génératrice ont des liens entre eux, on peut en diminuer le nombre [cf. propriété 2.7] pour obtenir une famille génératrice plus petite. Les liens existant entre ces vecteurs peuvent s'établir à l'aide de la notion de liberté.

DÉFINITION 2.10 (Famille libre)

Soit E un espace vectoriel et soient u_1, \dots, u_p des vecteurs de E . On dit que (u_1, \dots, u_p) est une **famille libre** de E si quelque soient les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a l'implication :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

REMARQUE 2.4.

Montrer qu'une famille est libre revient donc à démontrer qu'une implication est vraie. Il faut pour cela supposer au départ que l'on a $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$ pour en déduire que l'on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

DÉFINITION 2.11 (Famille liée)

Soit E un espace vectoriel et soient u_1, \dots, u_p des vecteurs de E . On dit que (u_1, \dots, u_p) est une **famille liée** de E si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non-tous nuls tels que.

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$$

REMARQUE 2.5.

- Toute famille qui contient 0_E est nécessairement liée.
- (u_1, u_2) est liée $\iff u_1$ et u_2 sont proportionnels.

THÉORÈME 2.12

Une famille est liée si et seulement si on peut trouver un vecteur de la famille qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

EXERCICE 2.14. Dans \mathbb{R}^3

$$u_1 = (1, 1, 0) \quad u_2 = (0, 1, 1) \quad u_3 = (1, 2, 2) \quad v_1 = (1, 1, 0) \quad v_2 = (0, 2, 1) \quad v_3 = (2, -4, -3)$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
2. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une famille liée.

EXERCICE 2.15. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2A + 2I_2$ puis dire si la famille (I_2, A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

EXERCICE 2.16. Dans $\mathbb{R}_2[x]$

Discuter suivant le paramètre $t \in \mathbb{R}$ de la liberté de la famille $(x \mapsto tx + 1, x \mapsto x^2 - 2t + 1, x \mapsto t + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.

Méthode 4 : Famille libre, famille liée

- Pour montrer qu'une famille \mathcal{F} est libre :
 1. si $\mathcal{F} = (u)$ il suffit de vérifier que $u \neq 0_E$
 2. si $\mathcal{F} = (u, v)$ il suffit de vérifier que u et v sont non colinéaires
 3. si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ avec $p \geq 3$ alors on commence par écrire $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$ pour se ramener à un système linéaire homogène que l'on cherche à résoudre pour obtenir $\forall i \in [1, p], \lambda_i = 0$.
- Pour montrer qu'une famille liée on montre généralement qu'un vecteur de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

2.6 Base**DÉFINITION 2.13**

Soit E un espace vectoriel et soient u_1, \dots, u_n des vecteurs de E .

On dit que la famille (u_1, \dots, u_n) est **une base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E .

EXERCICE 2.17. Dans \mathbb{R}^3 :

Soient $u_1 = (-1, 0, 1)$ $u_2 = (2, 1, 0)$ $u_3 = (1, 1, 3)$
Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 2.18. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exercice 1.15 et on note $F = \text{Vect}(I_2, A, A^2)$.
Déterminer une base de F .

EXERCICE 2.19. Dans $\mathbb{R}_2[x]$:

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / \forall x \in \mathbb{R}, 2xP(x) - x^2P'(x) = 0\}$. Déterminer une base de F .

Méthode 5 : Montrer qu'une famille est une base d'un sous-espace vectoriel

Pour montrer que la famille (u_1, \dots, u_p) est une base de F (un sous-espace vectoriel de E) :

- on montre que $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$; autrement que la famille (u_1, \dots, u_p) est génératrice de F . Les méthodes de cette étape dépendent fortement de l'espace E dans lequel on se trouve.
- on montre que la famille (u_1, \dots, u_p) est une famille libre

PROPRIÉTÉ 2.14

Toute base de E reste une base de E si :

- on change l'ordre des vecteurs de la famille
- on remplace l'un des vecteurs de la famille par un vecteur proportionnel.

REMARQUE 2.6.

Attention, si dans une base de E , on enlève ou on ajoute un ou plusieurs vecteurs, la nouvelle famille obtenue ne peut jamais être une base de E !

PROPRIÉTÉ 2.15

Soit E un espace vectoriel et soit $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E .

Alors, pour tout vecteur de E , il existe un unique n -uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

DÉFINITION 2.16

Avec les notations ci-dessus $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelées les **coordonnées** de \vec{u} dans la base B .

La matrice colonne $U_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée **vecteur colonne** associé à \vec{u} dans la base B .

EXERCICE 2.20. Dans \mathbb{R}^3 Soient $u_1 = (-1, 0, 1)$ $u_2 = (2, 1, 0)$ $u_3 = (1, 1, 3)$ $u = (-3, 2, 17)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer le vecteur $U_{\mathcal{B}}$ des coordonnées de u dans la base \mathcal{B} .

2.7 Dimension

DÉFINITION 2.17

On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il existe un entier $n \geq 1$ et des vecteurs u_1, \dots, u_n de E tels que $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

REMARQUE 2.7.

Attention à ce stade on ne dit pas que si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors E est de dimension n . La définition de la dimension est liée à la proposition suivante :

THÉORÈME 2.18 (et définition - Admis)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- E admet (au moins) une base.
- toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.
- Ce nombre est appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

REMARQUE 2.8.

Si $E = \{0_E\}$, on convient que $\dim E = 0$

EXERCICE 2.21. Dans \mathbb{R}^4 :

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de F .

EXERCICE 2.22. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Déterminer une base et la dimension de F .

EXERCICE 2.23. Dans $\mathbb{R}_3[x]$:

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x-1) = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de F .

THÉORÈME 2.19 (cas particulier de n vecteurs en dimension n)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et (u_1, \dots, u_n) une famille de n vecteurs de E .

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. (u_1, \dots, u_n) est une base
2. (u_1, \dots, u_n) est une libre
3. (u_1, \dots, u_n) est génératrice.

PROPRIÉTÉ 2.20 (dimensions et inclusions)

Soit E , un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G , deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Si $G \subset F$ alors $\dim G \leq \dim F$.
2. Si $G \subset F$ et si $\dim G = \dim F$, alors $F = G$.

2.8 Bases canoniques

Les espaces vectoriels de dimension finie les plus courants possèdent une base particulièrement simple, appelée base canonique.

PROPRIÉTÉ 2.21

Voici les bases canoniques et dimensions de quelques espaces vectoriels de références :

Espace Vectoriel	Base canonique	Dimension
\mathbb{R}^n	$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ avec $\vec{e}_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$	$\dim \mathbb{R}^n = n$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec $\vec{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \vdots & \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} i$	$\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$
$\mathbb{R}_n[x]$	(P_0, P_1, \dots, P_n) avec $P_i : x \mapsto x^i$ pour $0 \leq i \leq n$	$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$

EXEMPLES.

1. Dans \mathbb{R}^3 $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 qui est donc de dimension 3.

2. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension 6.

3. Dans $\mathbb{R}_2[x]$ $P_0 : x \mapsto 1$ $P_1 : x \mapsto x$ $P_2 : x \mapsto x^2$
 (P_0, P_1, P_2) est la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est donc de dimension 3.

2.9 Rang

DÉFINITION 2.22 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et soient (u_1, \dots, u_p) des vecteurs de E .

On appelle **rang** de la famille (u_1, \dots, u_p) , noté $rg(u_1, \dots, u_p)$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par (u_1, \dots, u_p) . Ainsi :

$$rg(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$$

EXERCICE 2.24. Dans \mathbb{R}^3

$$u_1 = (1, 2, -3)$$

$$u_2 = (-2, 0, 5)$$

$$u_3 = (8, 4, -21).$$

Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) ?

L'une des principales applications du rang est de détecter si la famille est une base :

PROPRIÉTÉ 2.23 (Détection de base à l'aide du rang)

Si E est de dimension n alors on a :

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \iff rg(u_1, \dots, u_n) = n.$$

REMARQUE 2.9.

On remarque ici qu'il s'agit d'un cas particulier d'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n .

Le calcul du rang d'une famille de vecteurs n'est en général pas facile. Voici une manière plus simple de calculer le rang d'une famille de vecteurs lorsqu'on connaît une base de E .

PROPRIÉTÉ 2.24 (Rang et vecteurs coordonnés dans une base)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et \mathcal{B} une base de E .

Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de E et (U_1, \dots, U_p) des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, U_i \text{ est le vecteur coordonnées de } u_i \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

Alors on a :

$$rg(u_1, \dots, u_p) = rg(U_1, \dots, U_p).$$

EXERCICE 2.25. Dans $\mathbb{R}_3[x]$

$$P_1 : x \mapsto 2x^3 - x^2 + 1$$

$$P_2 : x \mapsto x^2 + x + 1$$

$$P_3 : x \mapsto x^3 - 1.$$

Déterminer les coordonnées de chacun de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ puis en déduire le rang de la famille (P_1, P_2, P_3) .

En prolongeant l'idée de décomposer les vecteurs dans une base de E , nous introduisons une matrice capturant toute l'information nécessaire de la famille.

DÉFINITION 2.25 (Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base)

Soient E un espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E et

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B}** la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ dont les colonnes ont formées par (U_1, \dots, U_p) la famille des vecteurs coordonnées des vecteurs de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} .

EXERCICE 2.26. Reprendre l'exercice précédent et déterminer la matrice des coordonnées des vecteurs de (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

Rang matriciel

DÉFINITION 2.26 (Rang matriciel)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Soient c_1, \dots, c_p les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la matrice A .

On appelle rang de A , noté $rg(A)$, le rang de la famille (c_1, \dots, c_p) .

On a alors immédiatement d'après les définitions précédentes :

PROPRIÉTÉ 2.27 (Rang d'une famille vs rang matriciel)

Soient E un espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E et

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On a alors :

$$rg(u_1, \dots, u_p) = rg(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

Autrement dit pour calculer le rang d'une famille de vecteurs nous pouvons calculer le rang d'une matrice.

PROPRIÉTÉ 2.28 (Calcul du rang matriciel)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

- $rg(A) = rg({}^t A)$.
- Le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on lui applique les opérations élémentaires de l'algorithme du pivot de Gauss.
- Si $n = p$, alors A est inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$.

REMARQUE 2.10.

Le deuxième point de cette proposition nous incite donc à calculer le rang d'une matrice en l'échelonnant par l'algorithme du pivot de Gauss.

EXERCICE 2.27. Reprendre l'exercice précédent et déterminer le rang de la famille (P_1, P_2, P_3) en déterminant le rang d'une matrice.

EXERCICE 2.28. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ puis en déduire le rang de la famille de vecteurs $((1, 2, 3), (2, -1, 4), (-1, 0, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .

COROLLAIRE 2.29 (Rang maximal = base)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E

et $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs.

Alors on a :

$$\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{ est inversible.}$$

EXERCICE 2.29. La famille $((t, 1, 0), (-1, t, 1), (0, -1, t))$ est-elle une base de \mathbb{R}^3 ? Discuter suivant la valeur de $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2.30. La famille $(x \mapsto (x+t)^2, x \mapsto 12+tx, x \mapsto 2tx+x^2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$? Discuter suivant la valeur de $t \in \mathbb{R}$.

Démontrer qu'une famille de vecteurs est une base

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs.
Pour démontrer que \mathcal{B} est une base de E on peut :

1. revenir à la définition en montrant que \mathcal{B} est libre et génératrice ; c'est le cas lorsqu'on ne connaît pas la dimension de E et que l'on a démontré que $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
2. si $\dim(E) = n$ et si $p = n$ on a alors une famille de n vecteurs en dimension n et on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

(a) \mathcal{B} est une base $\iff \mathcal{B}$ est libre $\iff \mathcal{B}$ est génératrice

(b) \mathcal{B} est une base $\iff \text{rg}(\mathcal{B}) = n$

(c) \mathcal{B} est une base $\iff \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\mathcal{B})) = n \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\mathcal{B})$ est inversible.
(où \mathcal{B}_{can} désigne la base canonique de E)