Soutien exp ***et*** ln - ***Correction***

Exercice 1 Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

1. $\ln 16$ $4\ln 2$
2. $\ln 0,125$ $0,125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.
3. $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}\ln 2$
4. $\ln 72 - 2\ln 3$ $72 = 8\times 9 = 2^3\times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.
5. $\ln 36$ $2\ln 2 + 2\ln 3$

Exercice 2 Simplifier au maximum

1. $e^{-4x}\times e^{2x}$ e^{-2x}
2. $\dfrac{e^x}{e^{-2x}}$ e^{3x}
3. $\dfrac{\left(e^{2x}\right)^3}{ex+1}$ e^{7x-1}
4. $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}}$ $1-e^{2x}$

Exercice 3 Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

1. $e^{3\ln 2}$ 8
2. $\ln(\sqrt{e})$ $\frac{1}{2}$
3. $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ $\frac{1}{3}$
4. $e^{-2\ln 3}$ $\frac{1}{9}$
5. $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ $-\frac{1}{2}$
6. $e^{\ln 3 - \ln 2}$ $\frac{3}{2}$
7. $-e^{-\ln\frac{1}{2}}$ -2
8. $e^{-\ln\ln 2}$ $\frac{1}{\ln 2}$ On a $e^{-\ln\ln 2} = e^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \frac{1}{\ln 2}$.
9. $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ -17
10. $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ 1
11. $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)$ $= \frac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln e^2)\right) = \frac{1}{2}(-\ln e^2)) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1$.
12. $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$ e

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes.

1. $e^{3x+1}\times e^x = 1$ $4x+1=0 \Leftrightarrow x = -1/4$
2. $\dfrac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e$ $\Leftrightarrow e^{-4} = e : \emptyset$
3. $e^{5x+1} = 0$ $\emptyset$
4. $\ln(2x-1) = 0$ 1
5. $\ln(2x+e) = 1$ 0
6. $\ln(x^2+x+1) = 0$ Défini $\Leftrightarrow x^2+x+1>0$ $\Delta = 0$: def sur $\mathbb{R}$.
   $\ln(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$: $S = \{0, -1\}$
7. $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ $\varnothing$
   l'équation est définie sur $]-\infty, -5[\cap\Big(]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big) = \emptyset$: aucune solution !
8. $\ln(-x-5) = \ln\left(\dfrac{x-61}{x+7}\right)$
   l'équation est définie sur $]-\infty, -5[\cap\Big(]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big) =]-\infty, -7[$.
   $\ln(-x-5) = \ln\left(\dfrac{x-61}{x+7}\right) \Leftrightarrow x^2+13x-26 = 0$. 2 racines : $x_1 = \frac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13+\sqrt{273}}{2}$.
   Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

Exercice 5 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^{-x} \leqslant e$ $\Leftrightarrow -x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$: $[1, +\infty[$
2. $\dfrac{1}{e^{2x}} < e^{x-3}$ $\Leftrightarrow e^{-2x} < e^{x-3} \Leftrightarrow -2x < x-3 \Leftrightarrow -3x < -3 \Leftrightarrow x > 1$: $\mathcal{S} =]1, +\infty[$
3. $e^{x+1} > e^{3-2x}$ $\Leftrightarrow x+1 > 3-2x \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > 3/2$: $\mathcal{S} =]\frac{3}{2}, +\infty[$
4. $1 \leqslant e^{-x^2+x}$ $\mathcal{S} = [0, 1]$
5. $e^{1+\ln x} \geqslant 2$ $\mathcal{S} = [\frac{2}{e}, +\infty[$
6. $e^{-6x} \leqslant \sqrt{e}$ $\mathcal{S} = [-\frac{1}{12}, +\infty[$
7. $\ln(4x-1) < 0$ l'inéquation est définie sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$. $\ln(4x-1) < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$:
   $\mathcal{S} =]-\infty, \frac{1}{4}[$.
8. $e^x - 1 \geqslant 3 - 4e^x$ $\Leftrightarrow 5e^x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(4/5)$: $\mathcal{S} = [ln\frac{4}{5}, +\infty[$
9. $\ln(x^2+2x) - 1 < 0$ l'inéquation est définie ssi $x(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ *ou* $x > 0$.
   $\ln(x^2+2x) - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2+2x < 0$: $S = \emptyset$