

FONCTIONS NUMÉRIQUES DE DEUX VARIABLES

12.1 Généralités

DÉFINITION 12.1

Une fonction de deux variables x et y est une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^2 et à valeur dans \mathbb{R} . La représentation graphique d'une fonction f de deux variables est une **surface** correspondant à la partie $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ dans l'espace \mathbb{R}^3 .

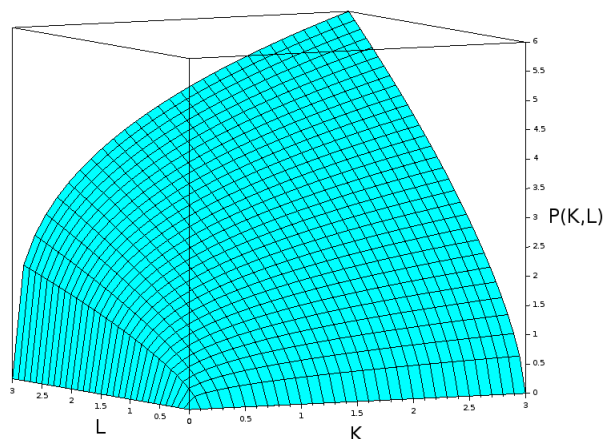
EXEMPLES.

- $(x, y) \mapsto x + y$ est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
- $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$ est une fonction de $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ dans \mathbb{R} .
- $(x, y) \mapsto \frac{1}{x + y}$ est une fonction définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$ dans \mathbb{R} .
- En économie, les fonctions de production de Cobb-Douglas, sont des fonctions qui, à deux variables réelles (la quantité de travail L et le capital investi K), associent la production totale P définie par :

$$P(L, K) = cK^\alpha L^{1-\alpha}$$

où α et c sont des constantes strictement positives.

Courbe Cobb-Douglas : $P(L, K) = 2K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$



12.2 Continuité

Intuitivement :

Étant donné un point M_0 de \mathbb{R}^2 et $f(M_0)$ son image par une fonction f à deux variables.

Dire que f est **continue en** M_0 signifie que

$f(M)$ est aussi "proche" de $f(M_0)$ que l'on veut
dès lors que
 M est "suffisamment proche" de M_0 .

DÉFINITION 12.2 (Fonctions coordonnées)

Les fonctions p_1 et p_2 définis par : $p_1 : (x, y) \mapsto x$ $p_2 : (x, y) \mapsto y$
sont appelées respectivement fonction première et deuxième coordonnée.

PROPRIÉTÉ 12.3 (admise)

- Les fonctions coordonnées sont continues sur \mathbb{R}^2 .
- Les fonctions sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients bien définis de fonctions continues sur \mathbb{R}^2 sont continues sur \mathbb{R}^2

\rightsquigarrow **en particulier** : les fonctions polynomiales à deux variables sont continues sur \mathbb{R}^2 .

REMARQUE 12.1.

Les fonctions coordonnées sont des fonctions polynomiales de **deux variables**.

PROPRIÉTÉ 12.4 (composées de fonctions continues)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow I \text{ et } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont continues} \quad \implies \quad \varphi \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue}$$

EXERCICE 12.1. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur \mathbb{R}^2 :

$$f : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2) \qquad g : (x, y) \mapsto xe^{xy}.$$

Généralisation aux fonction définies sur une partie de \mathbb{R}^2

La définition de continuité précédente s'applique à des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 , cependant il est nécessaire de généraliser la notion de **continuité** sur une partie de $U \subset \mathbb{R}^2$. En effet, par exemple la simple fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$ n'est pas définie sur \mathbb{R}^2 mais sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De même la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x + y + 1)$ est définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x + y > 0\}$.

Cel conduit à la notion de **parties ouvertes et fermées de \mathbb{R}^2** que nous ne développerons pas ici.

PROPRIÉTÉ 12.5 (admise)

Les résultats d'opérations et de composition des fonctions continues sur \mathbb{R}^2 se généralisent aux fonctions continues sur une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ ouverte.

EXERCICE 12.2. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur les parties de \mathbb{R}^2 proposées :

1. $f(x, y) = xy + x^2 + y^2$ sur \mathbb{R}^2
2. $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. $h(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sur $(\mathbb{R}^*_+)^2$
4. $i(x, y) = x^2 + x + 1$ sur \mathbb{R}^2

EXERCICE 12.3. Montrer la continuité des fonctions :

1. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ sur \mathbb{R}^2
2. $g(x, y) = (xy^2 + 5y)e^{x^2 - 3y^2 + 1}$ sur \mathbb{R}^2
3. $h(x, y) = xe^x$ sur \mathbb{R}^2 .
4. $i(x, y) = \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(y)}$ sur $(]1; +\infty[)^2$

12.3 Calcul différentiel pour les fonctions définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$

12.3.1 Dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction de deux variables

Pour une fonction de deux variables, il y a **deux façons de la dériver** :

- soit par rapport à x (en fixant mentalement y)
- soit par rapport à y (en fixant mentalement x).

DÉFINITION 12.6

Soient f une fonction de deux variables, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de U .

- $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow f(x, y_0) \text{ est dérivable en } x_0, \text{ le nombre dérivé est noté } \partial_1 f(x_0, y_0) \\ \text{Si } y \rightarrow f(x_0, y) \text{ est dérivable en } y_0, \text{ le nombre dérivé est noté } \partial_2 f(x_0, y_0) \end{cases}$
- Si $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies sur U , on dit que f admet des **dérivées partielles d'ordre 1**.
- Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et que celle-ci sont continues sur U , on dit que f **est de classe \mathcal{C}^1** sur U .
- Quand il existe, on appelle **gradient de f** en (x_0, y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0, y_0) \\ \partial_2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

Remarque : ∇ se lit **nabla**.

PROPRIÉTÉ 12.7 (admise)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert.

- Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U est toujours **continue** sur U .
- Les fonctions sommes, combinaisons linéaires, quotients bien définis et produits de fonctions de classes \mathcal{C}^1 sur U , sont de classe \mathcal{C}^1 sur U .

\rightsquigarrow **en particulier** : les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

- La composition $\varphi \circ f$ où $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow I$ sont de classe \mathcal{C}^1 respectivement sur I et sur U est encore de classe \mathcal{C}^1 sur U .

EXERCICE 12.4. Soient

$$f(x, y) = 2x^3 - 5x^3y^8 + 3xy - 5x + 2y + 7, \quad g(x, y) = e^{2x-3y^2} \quad \text{et} \quad h(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x - y}.$$

Montrer que f, g et h sont de classe \mathcal{C}^1 sur leur domaine de définition à préciser et calculer leur gradient.

12.4 Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux variables

DÉFINITION 12.8

Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^1 , sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$.

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow \partial_1 f(x, y_0) \text{ est dérivable en } x_0, \text{ le nombre dérivé est noté } \partial_{1,1} f(x_0, y_0) \\ \text{Si } y \rightarrow \partial_1 f(x_0, y) \text{ est dérivable en } y_0, \text{ le nombre dérivé est noté } \partial_{1,2} f(x_0, y_0) \\ \text{Si } x \rightarrow \partial_2 f(x, y_0) \text{ est dérivable en } x_0, \text{ le nombre dérivé est noté } \partial_{2,1} f(x_0, y_0) \\ \text{Si } y \rightarrow \partial_2 f(x_0, y) \text{ est dérivable en } y_0, \text{ le nombre dérivé est noté } \partial_{2,2} f(x_0, y_0) \end{array} \right.$
- Si $\partial_{1,1} f, \partial_{1,2} f, \partial_{2,1} f, \partial_{2,2} f$ sont définies sur U , on dit que f admet des **dérivées partielles d'ordre 2**.
- Si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U , f est dite de **classe \mathcal{C}^2** sur U .
- Quand elle existe, on appelle **hessienne de f** en (x_0, y_0) la matrice :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1} f & \partial_{1,2} f \\ \partial_{2,1} f & \partial_{2,2} f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

PROPRIÉTÉ 12.9 (admise)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert.

- Une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur U
- Les fonctions sommes, combinaisons linéaires, quotients bien définis et produits de fonctions de classes \mathcal{C}^2 sur U , sont de classe \mathcal{C}^2 sur U .

↪ **en particulier** : les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

- La composition $\varphi \circ f$ où $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow I$ sont de classe \mathcal{C}^2 respectivement sur I et sur U est encore de classe \mathcal{C}^2 sur U .

THÉORÈME 12.10 (Lemme de Schwarz)

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ alors :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \partial_{1,2} f(x, y) = \partial_{2,1} f(x, y).$$

En d'autres termes, la matrice hessienne $\nabla^2 f(x, y)$ est une **matrice symétrique**.

EXERCICE 12.5. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^2 sur leur domaine de définition et calculer leur hessienne au point indiqué :

1. $f(x, y) = 2x^3 - 5x^3y^8 + 3xy - 5x + 2y + 7$ sur \mathbb{R}^2 au point $(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. $g(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$ sur $(]1; +\infty[)^2$ au point $(x_0, y_0) = (e, e)$.

12.5 Extrema d'une fonction de deux variables

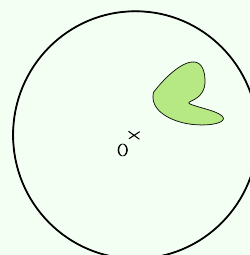
DÉFINITION 12.11 (Partie bornées - non exigible)

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite **bornée** si elle est incluse dans un disque d'un certain rayon.

Plus formellement : A est bornée si il existe $r > 0$ tel que pour tout $M \in \mathcal{P}$,

$$d(M, O) \leq r$$

(où O est le point $(0, 0)$).



REMARQUE 12.2.

On rappelle que pour $M(x, y)$ et $M_0(x_0, y_0)$ la distance $d(M, M_0)$ est donnée par la formule :

$$d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Pour $M_0(x_0, y_0)$, on note $D(M_0, r)$ le disque constitué des points $M(x, y)$ tels que $d(M, M_0) < r$.

DÉFINITION 12.12 (Extrema)

Soit f une fonction à deux variables définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$. On dit que :

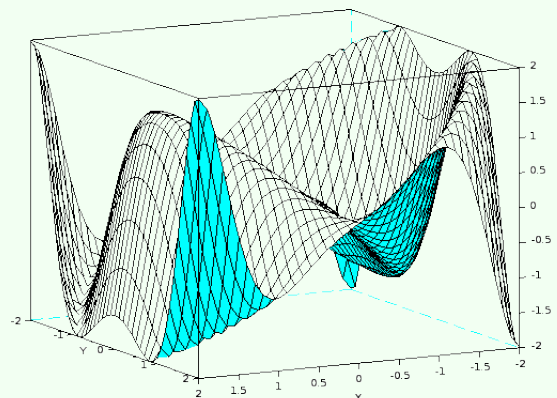
- f admet un **minimum global** en (x_0, y_0) si :

$$\forall (x, y) \in A, f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

- f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in D(M_0, r) \cap A, f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

On définit de même **maximum** global et local.



THÉORÈME 12.13 (admis)

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.

DÉFINITION 12.14 (Point critique)

Soit une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . On dit que le point $(x_0, y_0) \in U$ est un **point critique** de f lorsque :

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0.$$

REMARQUE 12.3.

Pour une fonction dérivable φ définie sur un intervalle de \mathbb{R} la notion de point critique est associée aux solutions

de l'équation $\varphi'(x) = 0$. Ces points sont en général cruciaux dans l'étude des variations de φ . Il en sera de même pour les fonctions de définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ bien qu'ici la notion de variations n'a pas vraiment de sens.

THÉORÈME 12.15 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum local)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 .
Tout extremum local de f est un point critique.

REMARQUE 12.4.

Attention l'hypothèse " **U un ouvert**" est essentielle. En effet, les extrema locaux situés "en bordure" ne vérifient pas nécessairement $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

REMARQUE 12.5.

Un extremum local est un point critique mais la réciproque est fautive. Pensez au point $x_0 = 0$ pour la fonction "cube" en une variable.

EXERCICE 12.6. Edhec

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 puis démontrer que f admet exactement trois points critiques.

EXERCICE 12.7. EML

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2 e^x - 1$ et $g :]0; +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$.

1. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$.
2. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$.
3. Montrer que g admet exactement deux points critiques, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

Détermination de la nature des points critiques

Remarquons que dans le cas d'une fonction φ d'une variable de classe \mathcal{C}^2 , la formule de Taylor-Young nous permet de préciser la position relative de la courbe de φ par rapport à l'une de ces tangentes.

Plus précisément nous avons :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Ainsi, lorsque x_0 est un point critique de φ , nous avons $\varphi'(x_0) = 0$ et donc :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

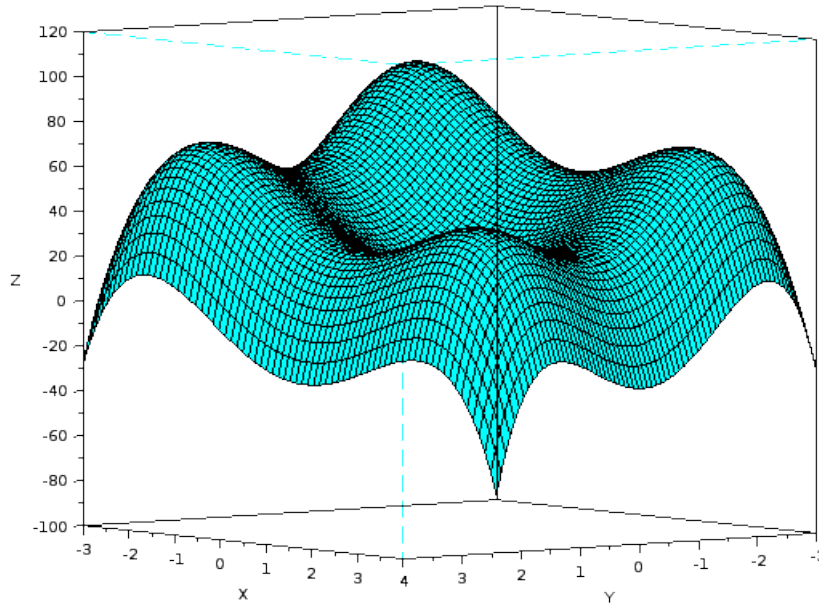
C'est donc le signe de $\varphi''(x_0)$ qui donne la nature du point critique x_0 . Nous voyons aisément que :

- si $\varphi''(x_0) > 0$, $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ au voisinage de x_0 et donc x_0 est un minimum local
- si $\varphi''(x_0) < 0$, $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ au voisinage de x_0 et donc x_0 est un maximum local
- si $\varphi''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure (il faudrait déterminer un DL à l'ordre 3 ou plus - Hors Programme)

Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , l'objet analogue à la dérivée seconde s'appelle la matrice hessienne.

D'après le Lemme de Schwarz, nous savons que cette matrice $H_0 = \nabla^2 f(x_0, y_0)$ est symétrique donc **diagonalisable**.

Rappelons qu'il est très facile de déterminer les valeurs propres de la matrice H_0 puisque celle-ci est une matrice 2×2 .


THÉORÈME 12.16 (Condition suffisante d'existence d'un extremum local)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in U$ un **point critique de f**

- Si toutes les **valeurs propres** de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement **positives**

Alors f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) .

- Si toutes les **valeurs propres** de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement **négatives**

Alors f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) .

- Si les **valeurs propres** de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont **non nulles** et de **signes opposés**

Alors f n'admet **pas d'extremum local** en (x_0, y_0) .

→ (x_0, y_0) est alors appelé **un point col** de f

- Si l'une des **valeurs propres** de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ est **nulle**

Alors **on ne peut pas conclure** quant à la nature du point critique.

REMARQUE 12.6.

On notera que le seul cas où on ne peut pas conclure correspond au cas où la matrice hessienne n'est pas inversible et correspond donc au cas où 0 est une valeur propre.

REMARQUE 12.7.

Notons $Sp(H_0) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

- le cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ équivaut à $\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$
- les cas $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ équivaut à $\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \end{cases}$

Dans certains cas, la matrice H_0 pourra contenir des coefficients implicites (par exemple contenant un réel α indéterminé et il ne sera pas possible de calculer les valeurs propres λ_1, λ_2).

Cette remarque permettra le plus souvent de conclure puisque si $H_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors les valeurs propres λ_1, λ_2 sont solutions de l'équation

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

et les relations coefficients/racines donnent :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - (a + d) \\ \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc \end{cases} .$$

Il est donc possible de déterminer la nature d'un point critique sans avoir à calculer les valeurs propres de la matrice hessienne correspondante.

Détermination des extremums

1. On commence par montrer que la fonction est de classe \mathcal{C}^2
2. On calcule le gradient et on détermine les points pour le(s)quel(s) il s'annule.
3. En chacun de ces points, on détermine la hessiennes et les valeurs propres correspondantes.
 - Si une ou plusieurs des valeurs propres sont nulle, on ne peut rien dire.
 - Si les valeurs propres sont de même signe, on est sur un extremum local.
 - Sinon il s'agit d'un point cols.
4. On compare les extremum locaux entre eux et éventuellement avec les points situés "sur les bords" pour déterminer l'extremum global.

EXERCICE 12.8. Soit $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$. Déterminer les extrema locaux de f . Sont-ils des extrema globaux ?

EXERCICE 12.9. Reprendre les exercices 6 et 7. Étudier la nature des points critiques trouvés.