Chapitre4

Compléments sur les fonctions

Dans ce chapitre, sauf précisions contraires, les fonctions sont définies au voisinage de x_0 avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.

4.1 Equivalence de deux fonctions

Définition 4.1

On dit que les deux fonctions f et g sont **équivalentes** et on note

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$$

s'il existe une fonction ε qui converge vers 0 quand $x \to x_0$ et tel qu'au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \big(1 + \varepsilon(x)\big) g(x)$$

$f(x) \underset{x_0}{\sim} +\infty$ n'a tout simplement pas de sens.

$f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$ n'a pas non plus beaucoup de sens (en fait : $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0 \iff f$ est constamment nulle au voisinage de x_0).

Remarque **4.1.**
Comme pour les suites nous avons les mêmes propriétés licites sur les équivalents. On fera tout de même bien attention au fait que dans le cas des fonctions les équivalents doivent être fait au même point "en x_0" pour que tout ceci est un sens !

Propriété 4.2

Caractérisation :	Si	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$		$g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0	alors,	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$
Transitivité :	Si	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$	et $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$		alors,	$f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$
Symétrie :	Si	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$			alors,	$g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$
Réflexivité :			$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$			
Produit :	Si	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$	et $k(x) \underset{x_0}{\sim} l(x)$		alors,	$f(x) \times k(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \times l(x)$
Quotient :	Si	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$	et $k(x) \underset{x_0}{\sim} l(x)$	$k(x)$ et $l(x) \neq 0$ au voisinage de x_0	alors,	$\dfrac{f(x)}{k(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g(x)}{l(x)}$
Puissance :	Si	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$	et $\alpha > 0$		alors,	$f(x)^\alpha \underset{x_0}{\sim} g(x)^\alpha$
Racine carrée:	Si	$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$		$f(x)$ et $g(x) \geqslant 0$ au voisinage de x_0	alors,	$\sqrt{f(x)} \underset{x_0}{\sim} \sqrt{g(x)}$

! On n'additionne pas les équivalents !

! On ne compose pas les équivalents !

PROPRIÉTÉ 4.3 (1ère utilisation : recherche de limite)

$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ et $g(x)$ ont la même limite (finie ou infinie) lorsque $x \longrightarrow x_0$.

$\rightsquigarrow$ en particulier : $\quad f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$, pour tout $\ell \in \mathbb{R}^*$.

PROPRIÉTÉ 4.4 (équivalents de fonctions polynomiales)

- Toute fonction polynomiale est équivalente, quand $x \to +\infty$, à son monôme de plus **haut** degré.
- Toute fonction polynomiale est équivalente, quand $x \to 0$, à son monôme de plus **bas** degré.

EXERCICE 4.1. Déterminer à l'aide d'un équivalent simple la limite des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x^4 + x^2 - 1$ en en 0 et en $-\infty$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x^5}{x^3 - x - 2}$ en 0 et en $+\infty$

PROPRIÉTÉ 4.5 (équivalents usuels au voisinage de 0)

$$\begin{array}{rcll} \ln\left(1+x\right) & \underset{0}{\sim} & x & \\ \ln(u) & \underset{1}{\sim} & u-1 & \\ e^x - 1 & \underset{0}{\sim} & x & \\ (1+x)^\alpha - 1 & \underset{0}{\sim} & \alpha x & \text{(pour tout réel } \alpha \neq 0\text{)} \end{array}$$

EXERCICE 4.2. Déterminer à l'aide d'un équivalent simple la limite des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ en 0 et en $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ en 1 et -1
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ en 1
4. $f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{\frac{1}{x}}} - 1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ en $+\infty$

EXERCICE 4.3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Méthode

Lorsqu'on cherche un équivalent d'une fonction (a priori plus complexe), on cherche d'abord à décomposer cette fonction en produit, quotient ou puissance de fonctions plus élémentaires dont on cherchera un équivalent.

Par exemple, pour $f(x) = \dfrac{(e^x - 1)^4}{(-3x^2 + x^3 - x^4)^2}$:

- on cherche un équivalent simple à $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et à $-3x^2 + x^3 - x^4 \underset{0}{\sim} -3x^2$.
- puis on utilise la propriété 4.2 : $\dfrac{(e^x - 1)^4}{(-3x^2 + x^3 - x^4)^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^4}{(-3x^2)^2}$.

$$\Rightarrow f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{9}$$

4.2 Négligeabilité de deux fonctions

DÉFINITION 4.6

On dit que f est **négligeable** devant g quand $x \to x_0$ et on note $f(x) \underset{x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ s'il existe une fonction ε qui converge vers 0 quand $x \to x_0$ et tel que au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

REMARQUE **4.2.**
Cas particulier: $f(x) \underset{x_0}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

PROPRIÉTÉ 4.7

Caractérisation :	Si	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	$g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0	alors,	$f(x) \underset{x_0}{=} o\big(g(x)\big)$
Transitivité :	Si	$f(x) \underset{x_0}{=} o\big(g(x)\big)$	et $g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$	alors,	$f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$
Combinaisons linéaires :	Si	$f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$	et $g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$	alors,	$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$

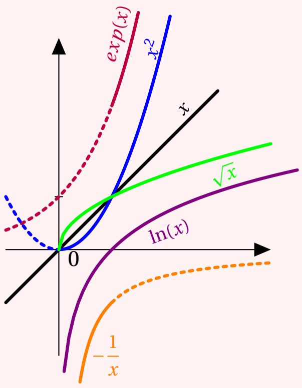
THÉORÈME 4.8 (Croissances comparées)

Pour tous réels $0 < a < A$

Avec la notation $f(x) \ll g(x) \iff f(x) = o\big(g(x)\big)$

$\lim\limits_{0+} \dfrac{x^A}{x^a} = 0$ $\qquad x^A \underset{0+}{=} o(x^a)$

$\lim\limits_{0+} x^a \ln(x) = 0$ $\qquad \ln(x) \underset{0+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^a}\right)$



$$\ln(x) \underset{+\infty}{\ll} x^a \underset{+\infty}{\ll} x^A \underset{+\infty}{\ll} e^x$$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^a}{\ln(x)} = +\infty \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0 \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0 \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$

EXERCICE 4.4.

1. Montrer que $2x^3 + 5(\ln(x))^2 \underset{+\infty}{\sim} 2x^3$
2. En déduire $2x^3 + 5(\ln(x))^2 + e^x \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

PROPRIÉTÉ 4.9 (Lien entre équivalence et négligeabilité)

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x_0}{=} g(x) + o(g(x))$$

EXERCICE 4.5. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes en 0^+ puis en $+\infty$:

1. $\exp(-x) + 4x^2 + \ln(2x) + \dfrac{1}{x^3}$
2. $\dfrac{e^x + \ln(3x)}{1 + 2e^{-x}}$
3. $e^{-\frac{1}{x}} + x^2 - 1$
4. $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2$.

4.3 Développement limité en un point x_0

Parfois la recherche d'un équivalent ne suffit pas ou pose problème. Par exemple nous savons que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ mais que dire du comportement de $\ln(1+x)-x$ au voisinage de 0 ? Nous voyons que devons développer d'autres techniques plus fines qui permettent de préciser cela. Ces techniques sont basées sur le lien entre négligeabilité et équivalence :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x_0}{=} g(x) + o(g(x)).$$

4.3.1 Développement limité à l'ordre 1

DÉFINITION 4.10

On dit que f **admet un développement limité d'ordre 1 en** x_0 s'il existe des réels a_0 et a_1 tels qu'au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + o\big((x-x_0)\big)$$

THÉORÈME 4.11 (DL d'ordre 1 et dérivabilité en un point)

On a **unicité** du développement limité à l'ordre 1. De plus,
• si f est dérivable en x_0 alors f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 et :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o\big(x-x_0\big)$$

• réciproquement, si f admet pour DL à l'ordre 1 en x_0 :

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + o\big((x-x_0)\big) \implies \left(\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et} \\ a_0 = f(x_0) \quad a_1 = f'(x_0) \end{array} \right)$$

EXERCICE 4.6. On considère la fonction $\left\{ \begin{array}{cl} 1+x+x\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{array} \right.$

1. Montrer que la fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0.
2. En déduire sans aucun calcul que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
3. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$? Dérivable ?

THÉORÈME 4.12 (Développements limités usuels d'ordre 1 au voisinage de 0)

$$\begin{array}{rcccccl} \ln\big(1+x\big) & \underset{0}{=} & & & x & + & o\big(x\big) \\ e^x & \underset{0}{=} & 1 & + & x & + & o\big(x\big) \\ (1+x)^\alpha & \underset{0}{=} & 1 & + & \alpha x & + & o\big(x\big) \quad \text{(pour tout réel } \alpha \neq 0) \end{array}$$

EXERCICE 4.7. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.
2. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer sans calcul $f'(0)$.
3. Quelle est l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f ?

4.3.2 Développement limité à l'ordre 2

DÉFINITION 4.13

On dit que f **admet un développement limité d'ordre 2 en** x_0 s'il existe des réels a_0, a_1 et a_2 tels qu'au voisinage de x_0:

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

THÉORÈME 4.14 (DL d'ordre 2)

On a **unicité** du développement limité à l'ordre 2. De plus,

Si f admet le DL d'ordre 2 en x_0 suivant :

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

Alors f admet un DL d'ordre 1 en x_0 donc, f est dérivable en x_0, $a_0 = f(x_0)$ $\quad a_1 = f'(x_0)$

Formule de Taylor-Young à l'odre 2 (admise)

Si f est deux fois dérivable au voisinage de x_0 alors,

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

EXERCICE 4.8. Déterminez le DL à l'ordre 2 de $\ln(x)$ en 1.

COROLLAIRE 4.15 (Développements limités usuels d'ordre 2 au voisinage de 0)

$$\begin{array}{rclcccccl}
\ln(1+x) & \underset{0}{=} & & & x & - & \frac{1}{2}x^2 & + & o(x^2) \\
e^x & \underset{0}{=} & 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & o(x^2) \\
(1+x)^\alpha & \underset{0}{=} & 1 & + & \alpha x & + & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 & + & o(x^2) \quad \text{(pour tout réel } \alpha \neq 0)
\end{array}$$

EXERCICE 4.9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. (a) Ecrire le DL de e^{-x} à l'ordre 2 en 0 puis en déduire le DL de $f(x)$ à l'ordre 1 en 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer le DL de $-(x+1)e^{-x} + 1$ à l'ordre 2 en 0 puis en déduire que $f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.
5. Conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4.4 Application des DL

4.4.1 Étude locale d'une courbe en un point

THÉORÈME 4.16

Soit f, une fonction définie sur un voisinage V de x_0 admettant un DL d'ordre 2 en x_0.
Notons $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$. On a alors les points suivants :

1. La tangente à (C_f) au point d'abscisse a pour équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.
2. Si $a_2 < 0$, alors (C_f) est localement située en-dessous de sa tangente.
3. Si $a_2 > 0$, alors (C_f) est localement située au-dessus de sa tangente.
4. Si $a_2 = 0$, on ne peut pas conclure quant à la position.

REMARQUE **4.3.**
Le DL d'ordre 1 en x_0: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o\big(x - x_0\big)$ donne l'équation de la tangente $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ mais ne donne pas sa position par rapport à la courbe représentative de f.

EXERCICE 4.10.

1. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = (x + 1)\ln(1 + x) - 1$.
2. En déduire que f est dérivable en 0 et l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 0.
3. Que pouvez-vous dire de la position de (C_f) par rapport à (T) au voisinage du point $(0; \frac{1}{2})$?

4.4.2 Étude des branches infinies en posant $u = \frac{1}{x}$ quand $x \longrightarrow +\infty$

EXERCICE 4.11. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le DL de $\ln(1 + u)$ d'ordre 2 en 0.
2. En déduire qu'il existe des réels a et b tels que pour tout $x > 0$:

$$f(x) \underset{+\infty}{=} ax + b + o(1).$$

3. Étudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$.