Chapitre6

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Ce chapitre doit constamment être vu comme un prolongement des techniques vues sur les intégrales des fonctions continues sur un segment du type $[a;b]$ au cas des intervalles $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;b]$ et plus généralement aux cas des fonctions continues sur un intervalle du type $]a;b]$ mais qui ne se prolongent pas par continuité en a.
Autre analogie, le cas de la borne $+\infty$ suggère également une comparaison avec les résultats et techniques vues sur les séries (convergence, propriétés algébriques, critères de convergence, ...)

6.1 Généralités

DÉFINITION 6.1

Soit f une fonction continue sur $[a:+\infty[$. Alors,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \qquad \text{n'a a priori pas de sens.}$$

On parle d'intégrale **généralisée** ou parfois **impropre**.
Néanmoins, si

$$\lim_{A\longrightarrow+\infty}\int_a^A f(t)dt \qquad \text{existe et est finie}$$

on dit que cette intégrale est **convergente** et on pose $\lim_{A\longrightarrow+\infty}\int_a^A f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt$.
Sinon on dit que l'intégrale correspondante est **divergente**.

EXERCICE 6.1. Étudiez la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$

DÉFINITION 6.2

De même, si g, h, i sont respectivement continues sur $\begin{cases}]-\infty;b], & \\ [a;b[& (\text{ et pas en } b) \\ ]a;b] & (\text{ et pas en } a). \end{cases}$

$$\text{alors,} \quad \int_{-\infty}^b g(t)dt \qquad \int_a^b h(t)dt \qquad \int_a^b i(t)dt \qquad \text{n'ont a priori pas de sens.}$$

On parle là encore d'intégrales **généralisées**.
Néanmoins, si

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\int_x^b g(t)dt \qquad \lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x h(t)dt \qquad \lim_{x\longrightarrow a}\int_x^b i(t)dt \qquad \text{existent et sont finies}$$

on dit que ces intégrales sont **convergentes** et on pose :

$$\int_{-\infty}^b g(t)dt = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\int_x^b g(t)dt \qquad \int_a^b h(t)dt = \lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x h(t)dt \qquad \int_a^b i(t)dt = \lim_{x\longrightarrow a}\int_x^b i(t)dt \qquad .$$

Si l'une de ces limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale est **divergente**.

IPP et changement de variable

- **On a le droit** de faire un **changement de variable affine** sur une intégrale impropre.
- Par contre, **on s'interdira** de faire directement un **changement de variable** sur une intégrale impropre.
- **On s'interdira** de faire directement une **IPP** sur une intégrale impropre.

Dans ces deux dernier cas, on se ramène d'abord à une intégrale classique et on passe à la limite après avoir effectué le changement de variable ou l'IPP.

EXERCICE 6.2. Étudiez la convergence de : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{t}{1+t^2}dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$.

PROPRIÉTÉ 6.3 (Intégrales faussement impropres)

Soit $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $b \in \mathbb{R}$.
Si f se prolonge par continuité en b alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

$\rightsquigarrow$ *on dit que l'intégrale est faussement impropre en b.*

EXERCICE 6.3. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ convergent.

6.2 Propriétés

Les propriétés de ce paragraphe sont énoncées pour a réel et $\overline{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ avec f et g continues sur $\left[a;\overline{b}\right[$.
Elles restent vraies par symétrie dans le cas où $\overline{a}$ est dans $\overline{\mathbb{R}}$, b réel avec f et g continues sur $]\overline{a};b]$..

PROPRIÉTÉ 6.4 (Linéarité de l'intégrale)

Soient $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} g(t)dt$ deux intégrales impropres convergentes.

Alors, quelque soient les réels λ et μ, $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} \lambda f(t)+\mu g(t)dt$ converge et :

$$\int_a^{\overline{b}} \lambda f(t)+\mu g(t)dt = \lambda\int_a^{\overline{b}} f(t)dt + \mu\int_a^{\overline{b}} g(t)dt$$

EXERCICE 6.4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}dt$ et on suppose la suite $(I_n)_n$ bien définie.
Etudier la monotonie de cette suite.

PROPRIÉTÉ 6.5 (Croissance de l'intégrale)

. Si pour tout t de $\left[a;\overline{b}\right[$, $f(t)\geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)dt$ converge alors,

$$\int_a^{\overline{b}} f(t)dt \geqslant 0$$

. Si pour tout t de $\left[a;\overline{b}\right[$, $f(t)\geqslant g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} g(t)dt$ convergent alors,

$$\int_a^{\overline{b}} f(t)dt \geqslant \int_a^{\overline{b}} g(t)dt$$

EXERCICE 6.5. On reprend la suite $(I_n)_n$ définie dans l'exercice précédent.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n\geqslant 0$.
2. Que peut-on en conclure sur la suite $(I_n)_n$?

PROPRIÉTÉ 6.6 (Relation de Chasles)

Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)dt$ converge,

alors quelque soit c dans $\left[a;\overline{b}\right[$, $\quad\displaystyle\int_a^{c} f(t)dt\quad$ et $\quad\displaystyle\int_c^{\overline{b}} f(t)dt$ convergent et :

$$\int_a^{\overline{b}} f(t)dt = \int_a^{c} f(t)dt + \int_c^{\overline{b}} f(t)dt$$

EXERCICE 6.6. On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer : $\forall k\geqslant 1,\quad \forall t\in[k;k+1],\quad \frac{1}{k}\geqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt$.
2. En déduire que : $\forall n\geqslant 1,\quad H_n\geqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{t}dt$.
3. En déduire que (H_n) diverge vers $+\infty$.

PROPRIÉTÉ 6.7 (parité)

• Si f est une fonction **paire**, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et dans ce cas

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt}.$$

• Si f est une fonction **impaire**, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et dans ce cas

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0}.$$

EXERCICE 6.7. 1. Montrer par un argument de parité que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}dt$ converge et vaut 1.

2. En déduire la nature et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|}dt$.

6.3 Intégrales généralisées de référence

DÉFINITION 6.8

Soit α, une constante réelle. On appelle **intégrale de Riemann** toute intégrale de la forme, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ où $a > 0$ ou bien de la forme $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ où $b > 0$.

REMARQUES **6.1.**

1. Dans la majorité des cas, on aura $a = b = 1$. On s'intéressera donc à $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$.
2. Pour ces intégrales, on considère toujours la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0;+\infty[$ car si α n'est pas entier t^α n'existe pas pour $t < 0$.
3. $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ n'est impropre en 0 que si $\alpha > 0$.

THÉORÈME 6.9 (Intégrales de références)

Intégrales de Riemann : Soit $\alpha > 0$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 \quad \text{et dans ce cas : } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1 \quad \text{et dans ce cas : } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Intégrales exponentielles :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda > 0 \quad \text{et dans ce cas : } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Intégrale logarithmique:

$$\int_0^1 \ln(t) dt \quad \text{converge} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \ln(t) dt = -1$$

EXERCICE 6.8.

1. En déduire, à l'aide d'un changement de variable, la convergence et la valeur de $\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt$.
2. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(1-t) dt$.

6.4 Critères de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

Les théorèmes de ce paragraphe sont énoncées pour a réel et $\overline{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ avec f et g continues sur $\left[a;\overline{b}\right[$.
Ils restent vraies par symétrie dans le cas où $\overline{a}$ est dans $\overline{\mathbb{R}}$, b réel avec f et g continues sur $]\overline{a};b]$.
Remarque : notez l'extrême ressemblance avec les 3 critères de convergence du cours sur les séries à termes positifs.

THÉORÈME 6.10 (critère de comparaison)

Supposons qu'au voisinage de $\overline{b}$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

- Si $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} g(t) dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t) dt$ converge.
- Si $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t) dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} g(t) dt$ diverge.

EXERCICE 6.9. Étudier par comparaison la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt$

THÉORÈME 6.11 (Critère de négligeabilité)

Supposons qu'au voisinage de $\overline{b}$:

$$\begin{array}{l} f(t) > 0 \\ g(t) > 0 \end{array} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{\overline{b}}{=} o\big(g(t)\big)$$

$$\text{Si} \quad \int_a^{\overline{b}} g(t)\,dt \text{ converge} \quad \text{alors} \quad \int_a^{\overline{b}} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

EXERCICE 6.10. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ en montrant que $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

THÉORÈME 6.12 (Critère d'équivalence)

Supposons qu'au voisinage de $\overline{b}$:

$$\begin{array}{l} f(t) > 0 \\ g(t) > 0 \end{array} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{\overline{b}}{\sim} g(t)$$

$$\int_a^{\overline{b}} g(t)\,dt \text{ converge} \quad \text{SSi} \quad \int_a^{\overline{b}} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

Autrement dit les intégrales sont de même nature.

EXERCICE 6.11. Montrer que la suite $(I_n)_n$ définie à l'Ex3 est bien définie.

EXERCICE 6.12. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,dt$ à l'aide d'équivalents simples.

6.5 Intégrales généralisées de fonctions non positives

Les énoncées de ce paragraphe sont donnés pour a réel et $\overline{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ avec f et g continues sur $\left[a;\overline{b}\right[$.
Ils restent vraies par symétrie dans le cas où $\overline{a}$ est dans $\overline{\mathbb{R}}$, b réel avec f et g continues sur $\left]\overline{a};b\right]$.

DÉFINITION 6.13

Soient a un réel, $\overline{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continues sur $\left[a;\overline{b}\right[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)\,dt$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} |f(t)|\,dt$ est convergente.

PROPRIÉTÉ 6.14 (CVA ⇒ CV et inégalité triangulaire)

Si $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors $\displaystyle\int_a^{\overline{b}} f(t)\,dt$ est convergente.
De plus, on a alors :

$$\textbf{(Inégalité triangulaire) :} \quad \left|\int_a^{\overline{b}} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^{\overline{b}} |f(t)|\,dt$$

6.6 Intégrales généralisées en plusieurs points

DÉFINITION 6.15

Soit f une fonction continue sur $]\overline{a}, \overline{b}[$ avec $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ et $c \in]\overline{a}, \overline{b}[$.
L'intégrale $\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(t)dt$, est dite convergente lorsque $\int_{\overline{a}}^{c} f(t)dt$ et $\int_{c}^{\overline{b}} f(t)dt$ convergent. On a alors,

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(t)dt = \int_{\overline{a}}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\overline{b}} f(t)dt$$

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

DÉFINITION 6.16

Soit f une fonction continue sur $]\overline{a}; a_1[,]a_1; a_2[, \ldots]a_{n-1}, a_n[$ et $]a_n; \overline{b}[$
L'intégrale $\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(t)dt$, est dite convergente lorsque les intégrales,
$\int_{\overline{a}}^{\overline{a}_1} f(t)dt, \int_{\overline{a}_1}^{\overline{a}_2} f(t)dt, \ldots, \int_{\overline{a}_{n-1}}^{\overline{a}_n} f(t)dt, \int_{\overline{a}_n}^{\overline{b}} f(t)dt$ sont toutes convergentes. On a alors,

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(t)dt = \int_{\overline{a}}^{\overline{a}_1} f(t)dt + \int_{\overline{a}_1}^{\overline{a}_2} f(t)dt + \ldots + \int_{\overline{a}_{n-1}}^{\overline{a}_n} f(t)dt + \int_{\overline{a}_n}^{\overline{b}} f(t)dt$$

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

REMARQUE **6.1.**
Toutes les propriétés des paragraphe 6.3 et 6.5 se généralisent sur ces intégrales.