

# RAPPELS D'ECG1 :

## INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

### 1.1 Primitives

#### DÉFINITION 1.1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et si :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

#### THÉORÈME 1.2

1. Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet au moins une primitive sur  $I$ .
2. Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors toute autre primitive de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $F + c$  où  $c$  est une constante.

#### Primitives usuelles :

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	Domaine de validité
$a$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n$ entier $\neq -1$ )	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha$ ( $\alpha$ réel $\neq -1$ )	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + c$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$e^x$	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$u' u^n$ ( $n$ entier $\neq -1$ )	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$u' u^\alpha$ ( $\alpha$ réel $\neq -1$ )	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + c$	$]0, +\infty[$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u  + c$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$u' e^u$	$e^u + c$	$\mathbb{R}$

**EXERCICE 1.1.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = x^4$

$g(x) = \frac{1}{x^4}$

$h(x) = x + 4$

$i(x) = 4x$

$j(x) = 4^x$

$k(x) = \frac{1}{4x+1}$

$l(x) = \frac{5}{(4x+1)^3}$

$m(x) = (4x+1)^5$

$n(x) = e^{4x+1}$

## 1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

### DÉFINITION 1.3

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Quels que soient les réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , on définit le nombre réel, noté  $\int_a^b f(t) dt$ , appelé intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$  par :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ce nombre est indépendant du choix de  $F$ .

### PROPRIÉTÉ 1.4 (linéarité de l'intégrale)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ . Soient  $a$  et  $b$ , deux réels de  $I$ .

Pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

### EXERCICE 1.2.

1. Soient  $I_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n + J_n = 1$ .
2. Calculer  $\int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k \right) dx$

### PROPRIÉTÉ 1.5

Soit  $f$ , une fonction continue sur  $I$ . Soient  $a, b, c$  trois réels de  $I$ .

1.  $\int_a^a f(t) dt = 0$
2. si  $f \geq 0$  sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt = 0 \iff f = 0$  sur  $[a; b]$
3.  $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(x) dx$
4.  $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$  (relation de Chasles)

### PROPRIÉTÉ 1.6 (croissance de l'intégrale)

Si  $\left. \begin{array}{l} \bullet a \leq b \\ \bullet f, g \text{ sont continue sur } [a, b] \end{array} \right\}$  Alors on a l'implication :  $\implies \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

**EXERCICE 1.3** (Etude de suites). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n > 0$ .
2. Etudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. En déduire que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**EXERCICE 1.4** (Etude de séries). Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , la somme partielle de la série harmonique.

1. En utilisant la décroissance de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  montrer que  $\forall k \geq 1, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ .
2. En déduire par sommation que  $\forall n \geq 1, S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt$ .
3. En conclure que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

### 1.3 Deux techniques de calcul d'une intégrale

#### THÉORÈME 1.7 (intégration par parties)

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$ . Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**EXERCICE 1.5.** 1. Calculer  $\int_0^1 te^{2t} dt$ .

2. En reprenant la définition de  $I_n$  de l'exercice 3 précédent, calculer  $I_1$ .

#### THÉORÈME 1.8 (changement de variable)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ .

Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$  vérifiant  $u([a; b]) \subseteq I$

Alors, on a la formule dite de changement de variables :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

**EXERCICE 1.6.** Calculer  $\int_0^1 \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt$  en posant  $u = e^t + 1$ .

#### COROLLAIRE 1.9

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a$  un réel quelconque de  $I$ .

- Si  $f$  est paire, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$
- Si  $f$  est impaire, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

**EXERCICE 1.7.** 1. Etudier la parité de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+|t|}$ .

2. Calculer en fonction de  $A > 0$  l'intégrale suivante  $\int_{-A}^A \frac{1}{1+|t|} dt$ .

## 1.4 Fonction définie par une intégrale

### THÉORÈME 1.10 (théorème fondamental de l'intégration)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

Soit  $F$  la fonction définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Alors, on a les points suivants :

1.  $F$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x$  de  $I$  :  $F'(x) = f(x)$ .  
Autrement dit  $F$  est une primitive de  $f$ .
2.  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
3.  $F(a) = 0$  donc  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$

**EXERCICE 1.8.** Soit  $F$  la fonction définie pour tout  $x > 1$  par  $F(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$ .

1. Justifier que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]1; +\infty[$ , calculer  $F'(x)$  puis étudier les variations de  $F$ .
2. Calculer  $F(2)$  puis étudier le signe de  $F$ .
3. En utilisant que pour tout  $t > 1$  :  $\ln t \leq t - 1$  :
  - (a) Montrer que pour tout  $x \geq 2$  :  $F(x) \geq \ln(x - 1)$   
puis déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
  - (b) Montrer que pour tout  $1 < x \leq 2$  :  $F(x) \leq \ln(x - 1)$   
puis déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$
  - (c) Dresser le tableau de variation de  $F$ .
4. Soit  $G$  la fonction définie pour tout  $x > 1$  par  $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ .
  - (a) Exprimer  $G$  à l'aide de  $F$ .
  - (b) Montrer que  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $]1; +\infty[$ , calculer  $G'(x)$  puis étudier les variations de  $G$ .