

LOIS NORMALES ET INTÉGRALES GAUSSIENNES

9.1 Lois normales

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

PROPRIÉTÉ 9.1

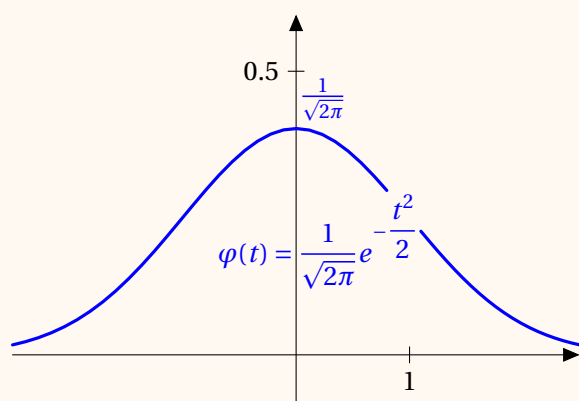
Support

$$X(\Omega) = \mathbb{R}$$

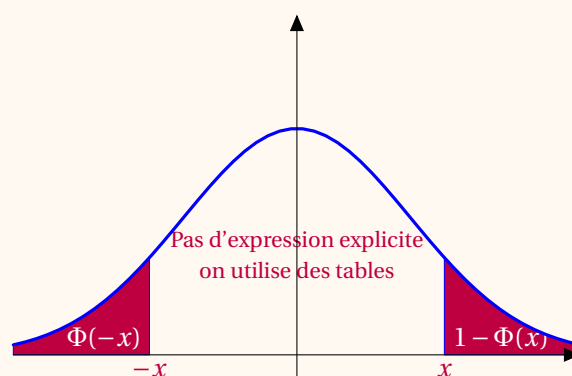
Espérance & Variance

$$E(X) = 0 \quad V(X) = 1$$

Densité notée φ



Fct de répartition notée Φ



(Admis)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

PROPRIÉTÉ 9.2

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P(X \leq x) \\ 1 - \Phi(x) &= P(X > x) \\ \Phi(0) &= \frac{1}{2} \\ \Phi(-x) &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

EXERCICE 9.1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$ et F_Y sa fonction de répartition.

Déterminer la fonction F_Y à l'aide de la fonction de répartition Φ de X .

Lois normales (ou de Laplace-Gauss) $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Une loi normale modélise les phénomènes qui dépendent d'un grand nombre de causes indépendantes, dont aucune n'est prépondérante et dont les effets s'additionnent (conditions de Borel). Elle tient une place centrale en théorie des probabilités et doit donc être étudiée en profondeur.

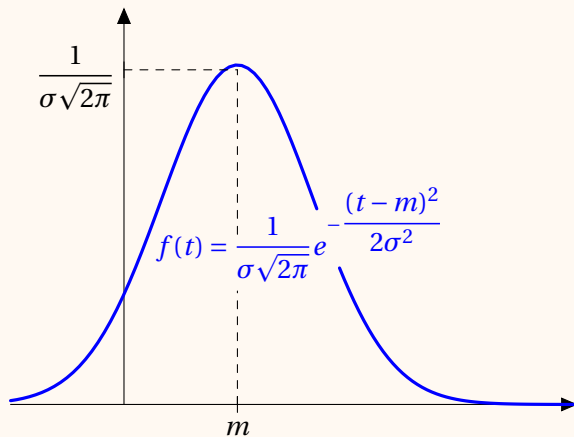
Ces phénomènes sont facilement reconnaissables par la distribution de leurs histogrammes de fréquence qui est **symétrique** et en **forme de cloche**.

PROPRIÉTÉ 9.3

Support

$$X(\Omega) = \mathbb{R}$$

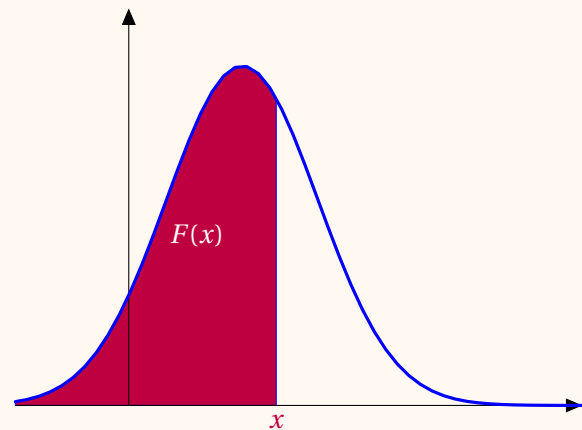
Densité



Espérance & Variance

$$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2$$

Fct de répartition



On se ramènera toujours à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ par transformation affine ;

PROPRIÉTÉ 9.4

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

EXERCICE 9.2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq \mu + \sigma x) = \Phi(x)$ où Φ est la fonction de répartition d'une variable $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

THÉORÈME 9.5 (Stabilité des lois normales (Admis))

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** alors,

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ des variables aléatoires **indépendantes** alors,

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

9.2 Intégrales gaussiennes

THÉORÈME 9.6 (Admis)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

REMARQUE 9.1.

Ce résultat permet de démontrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ intervenant dans la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est bien une densité. La démonstration dépasse largement le cadre de ce cours.

DÉFINITION 9.7

On appelle **intégrale gaussienne**, toute intégrale dans laquelle nous retrouvons la densité habituelle d'une variable $X \mapsto \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

EXERCICE 9.3. Déterminer la valeur des intégrales gaussiennes suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

9.3 Table de la loi normale

EXERCICE 9.4. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la table ci-après :

1. Déterminer une probabilité :

- Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P(Z \leq 0,16)$ avec $Z \mapsto \mathcal{N}(0, 1)$
- Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P(X \leq 7)$ avec $X \mapsto \mathcal{N}(5, 4)$
- Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P(|X| \leq 2)$ avec $X \mapsto \mathcal{N}(1, 4)$

2. Déterminer un paramètre :

- Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel x tel que $P(Z > x) = 0,09$ avec $Z \mapsto \mathcal{N}(0, 1)$
- Soit $X \mapsto \mathcal{N}(0, \sigma)$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel $\sigma > 0$ sachant que $P(X < 0,5) = 0,98$.
- Soit $X \mapsto \mathcal{N}(\mu, 4)$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel μ sachant que $P(X < 3) = 0,75$.
- Soit $X \mapsto \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près des réels μ et $\sigma > 0$ sachant que $\begin{cases} P(X > 75) = 0,1 \\ P(X < 50) = 0,25 \end{cases}$.

Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

par exemple $\Phi(0,67) = 0,7486$

<i>x</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817