

# CHAÎNES DE MARKOV

## Introduction

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire,  $X_n$  représentant l'état du processus à l'instant  $n$ . Cette notion a des applications courantes dans de nombreux domaines (dynamique des populations, algorithmique des réseaux, dynamique d'une épidémie,...). L'hypothèse principale qui fait qu'une suite de variables aléatoires est une chaîne de Markov est que toute l'information utile pour prédire le futur est contenue dans l'instant présent, la connaissance des états antérieurs ne donne aucun renseignement supplémentaire pour prévoir le futur.

Dans tout ce qui suit,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un espace probabilisé.

## 13.1 Graphes probabilistes

### DÉFINITION 13.1 (Graphes probabilistes)

Un **graphe probabiliste** (d'ordre  $n$ ) est un graphe orienté pondéré vérifiant les propriétés suivantes :

- les  $n$  sommets du graphe s'appellent les **états** du système et sont numérotés de 1 à  $n$ ,
- les poids des arcs indiquent les probabilités de passage d'un état à l'autre (il est notamment parfois possible de rester dans le même état),
- la somme des poids des arcs issus d'un même sommet vaut 1.

**EXERCICE 13.1.** On s'intéresse à la propagation d'une maladie (non covidienne) dans une population. On suppose que la probabilité qu'une personne malade un jour donné soit guérie le lendemain vaut 0,3, et que la probabilité qu'une personne saine tombe malade le lendemain vaut 0,2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

### DÉFINITION 13.2 (Matrice de transition)

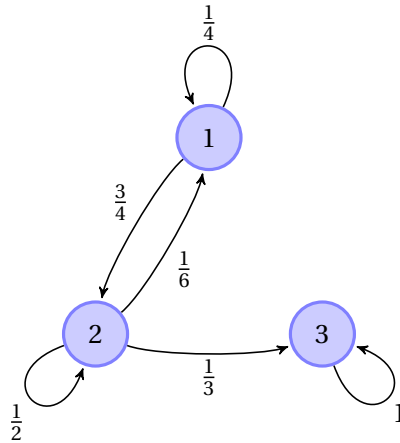
La **matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre  $n$  est la matrice  $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le coefficient  $p_{i,j}$  représente le poids de l'arc allant du sommet  $i$  au sommet  $j$ , c'est à dire la probabilité de passer de l'état  $i$  à l'état  $j$ .

### REMARQUE 13.1.

La matrice de transition du graphe permet ainsi de représenter un graphe probabiliste en Python .

**EXERCICE 13.2.** Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste de l'exercice précédent.

**EXERCICE 13.3.** On considère le graphe probabiliste suivant :



1. Quelle est la probabilité de passer de l'état 3 à l'état 1 ?
2. Déterminer la matrice de transition associée à ce graphe.

**REMARQUE 13.2.**

Une fois à l'état 3 on y reste. On appelle un tel état un *état absorbant*.

**PROPRIÉTÉ 13.3**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de transition d'un graphe probabiliste.

La somme de chaque ligne de  $A$  vaut 1.

En d'autres termes :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1.$$

**REMARQUE 13.3.**

Une telle matrice est dite **stochastique**. L'étude de l'ensemble des matrices stochastiques d'ordre  $n$  est intéressante mais elle est hors programme.

On peut montrer par exemple que si  $A$  est stochastique et si on note  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  alors la propriété précédente implique la relation :

$$AU = U.$$

Autrement dit, si  $A$  est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, alors 1 est une valeur propre de  $A$ .

## 13.2 Chaînes de Markov

**DÉFINITION 13.4**

Soit  $(X_k)_k$  une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et avec le même univers image  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On dit que  $(X_k)_k$  est une **chaîne de Markov** si :

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et tout  $(i_0, i_1, \dots, i_{k-1}) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$ , on a :

$$P_{(X_k=i) \cap (X_{k-1}=i_{k-1}) \cap \dots \cap (X_0=i_0)}(X_{k+1}=j) = P_{(X_k=i)}(X_{k+1}=j).$$

**REMARQUE 13.4.**

Ce qu'il faut comprendre de cette définition, c'est qu'à un instant  $k \in \mathbb{N}^*$ , le futur (représenté par la variable  $X_{k+1}$ ) ne dépend que du présent (représenté par  $X_k$ ) et pas du passé (représenté par  $X_0, \dots, X_{k-1}$ ).

**DÉFINITION 13.5 (Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste)**

Considérons un graphe probabiliste d'ordre  $n$  de matrice de transition  $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On appelle **chaîne de Markov associée à ce graphe** la chaîne de Markov  $(X_k)_k$  dont l'univers image est l'ensemble des sommets du graphe  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j) = p_{i,j}.$$

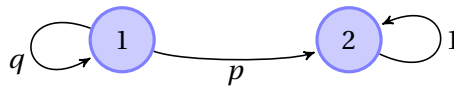
Les probabilités conditionnelles  $p_{i,j}$  sont aussi appelées **probabilités de transition**.

On dit que la chaîne est dans l'état  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  à l'instant  $k$  si et seulement si  $(X_k = i)$  est réalisé.

**REMARQUE 13.5.**

On observe que dans cette définition, la loi d'évolution du passage d'un état à un autre ne dépend pas de l'instant où l'on se place. On parle dans ce cas de *chaîne de Markov homogène*.

**EXERCICE 13.4** (Une chaîne à deux états). Soit  $p \in [0, 1]$  et  $q = 1 - p$ . On considère la chaîne de Markov  $(X_k)_k$  associée au graphe suivant :



On suppose que  $X_0 = 1$ , ce qui signifie qu'à l'instant initial la chaîne se trouve est dans l'état 1.

1. Déterminer la matrice de transition.
2. Combien a-t-on d'états absorbants ?
3. Montrer que la suite  $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique.
4. En déduire la loi de  $X_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**DÉFINITION 13.6**

Soit  $(X_k)_k$  une chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste d'ordre  $n$  et de matrice de transition  $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On appelle  $k$ -ème **état probabiliste de la chaîne** le vecteur ligne  $V_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  définie par :

$$V_k = ( P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad \dots \quad P(X_k = n) ).$$

En particulier  $V_0 = ( P(X_0 = 1) \quad P(X_0 = 2) \quad \dots \quad P(X_0 = n) )$  est appelé état (probabiliste) initial de la chaîne.

**REMARQUE 13.6.**

Le  $k$ -ème état probabiliste de la chaîne représente, sous forme d'un vecteur ligne, la loi de la variable  $X_k$ .

### 13.3 Calcul du $k$ -ème état probabiliste

Dans toute la suite on considère  $(X_k)_k$  une chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste d'ordre  $n$  et de matrice de transition  $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Les probabilités de transition  $p_{i,j}$  étant des probabilités conditionnelles  $P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j)$ , par une application immédiate de la formule des probabilités totales on obtient :

**PROPRIÉTÉ 13.7 (Hors-Programme)**

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  :

- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^n p_{i,j} P(X_k = i).$
- $\forall k \in \mathbb{N}, V_{k+1} = V_k A$
- $\forall k \in \mathbb{N}, V_k = V_0 A^k.$

**REMARQUE 13.7.**

Il faudra savoir re-démontrer toutes ces étapes ! En particulier le premier point de cette proposition doit être démontré avec rigueur en appliquant rigoureusement la formule des probabilités totales.

**EXERCICE 13.5.**

On considère un *zappeur compulsif* qui hésite entre les chaînes 1 et 2. A l'instant initial il choisit la chaîne au hasard de manière équiprobable, puis à chaque instant :

- s'il est sur la chaîne 1, il zappe sur la chaîne 2 avec probabilité  $\frac{1}{2}$
- s'il est sur la chaîne 2, il zappe sur la chaîne 1 avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

On note  $(X_k)_k$  la variable aléatoire égale au numéro de la chaîne que regarde le téléspectateur à l'instant  $k$ .

1. Représenter le graphe probabiliste associé ainsi que la matrice de transition que l'on notera  $A$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
3. En déduire l'existence d'une matrice inversible  $P$  et d'une matrice diagonale  $D$  telle que  $A = PDP^{-1}$ .
4. Expliciter la matrice  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
5. Montrer soigneusement que :  $\forall k \in \mathbb{N}, V_{k+1} = V_k A$ .
6. En déduire, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'expression du  $k$ -ème état probabiliste de la chaîne.
7. En déduire les limites  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 1)$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 2)$ , puis en donner une interprétation dans le cadre de l'exercice.

## 13.4 États stables

Dans cette section on considère  $(X_k)_k$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $A$ .

### DÉFINITION 13.8

On dit qu'un vecteur ligne  $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  est un **état stable** si :

- $VA = V$
- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ v_j \geq 0$
- $\sum_{j=1}^n v_j = 1$ .

### REMARQUE 13.8.

Un état stable représente (en ligne) la loi discrète d'une variable  $X$  de support  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

### REMARQUE 13.9.

Un état absorbant est un état stable mais la réciproque est bien sûr fautive. Les états stables sont les *états limites* que l'on retrouvera lorsque nous étudierons la convergence en loi d'une chaîne de Markov.

### REMARQUE 13.10.

On peut prouver (hors programme) que pour une matrice de transition  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une chaîne de Markov, 1 est valeur propre également de  ${}^tA$  prouvant ainsi que toute chaîne de Markov admet (au moins) un état stable.

On peut donc reformuler le premier point de la définition précédente par :

${}^tV$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1.

Une méthode de recherche des états stables d'une chaîne de Markov passe donc en général par le calcul du sous-espace propre  $E_1({}^tA)$ . On doit ensuite trouver parmi les vecteurs de base obtenus ceux qui répondent aux deux autres points de la définition à savoir : les coefficients doivent être strictement positifs et de somme 1.

Par exemple si  $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre 1 et de coordonnées strictement

positives alors en posant  $m = \sum_{i=1}^n x_i$ , on a  $m > 0$  (puisque  $X \neq \vec{0}$ ) et le vecteur ligne :

$$V = \left( \frac{1}{m}x_1 \quad \frac{1}{m}x_2 \quad \dots \quad \frac{1}{m}x_n \right) \text{ est alors un état stable de la chaîne.}$$

**EXERCICE 13.6.** On reprend l'exemple du *zappeur compulsif*.  
Montrer que la chaîne admet un unique état stable et le déterminer.

### REMARQUE 13.11.

La recherche des états stables est motivée par le résultat suivant :

### THÉORÈME 13.9 (Hors-Programme)

Supposons que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = j) = v_j$ .  
Alors  $V = (v_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  est un état stable de la chaîne.

### REMARQUE 13.12.

On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : si la chaîne *converge* alors elle converge vers un état stable. La notion de convergence est celle de la convergence en loi que nous avons étudiée précédemment.

Un état stable représentant la loi d'une certaine variable de support  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , on peut reformuler cette propriété par

**Si la chaîne converge, alors elle converge en loi vers un état stable.**