# RÉDUCTION DES MATRICES CARRÉES

## Introduction

On a vu dans un chapitre précédent que si deux matrices $A$ et $B$ représentent un même endomorphisme $f$ dans deux bases différentes alors il existe une matrice inversible $P$ telle que $A = PBP^{-1}$. On dit aussi que les matrices $A$ et $B$ sont semblables.
Il est alors naturel de chercher, parmi toutes les matrices $B$ possibles, s'il en existe une d'une forme très simple, par exemple diagonale.
L'une des raisons principales réside dans le fait que si $B = D$ est une matrice diagonale alors ses puissances se calculent très facilement.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi si $A = PDP^{-1}$ alors par une récurrence élémentaire (à faire proprement le jour J) pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A^k = PD^kP^{-1}$. Ainsi le nombre de calculs des puissances de $A$ est alors considérablement **réduit** .

L'objectif de ce chapitre est, partant d'une matrice carrée $A$ de taille $n$, de trouver **si possible**, une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (et donc une matrice de passage inversible $P$) de sorte que $P^{-1}AP$ soit une **matrice diagonale**.

**On peut procéder par analyse du problème :** soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\mathscr{B} = (e_1, ...e_n)$ une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est la matrice diagonale $D$ ci-dessus. Alors par définition de ce qu'est la matrice d'un endomorphisme dans une base on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :

$$f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Du point de vue matriciel, il revient donc à chercher des valeurs réelles $\lambda$ et des vecteurs $X_i \neq 0$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$AX_i = \lambda X_i \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)X_i = 0.$$

Autrement dit, nous devons nous intéresser aux valeurs de $\lambda$ pour lesquelles :

$$Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.$$

## 8.1 Éléments propres d'une matrice

DÉFINITION 8.1 (Éléments propres d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Un réel $\lambda$ est appelé **valeur propre** de $A$ s'il existe un vecteur (colonne) non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.
- Un tel vecteur (colonne) $X$ est appelé **vecteur propre** de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.
- L'ensemble des valeurs propres de $A$ s'appelle le **spectre** de $A$ et se note $Sp(A)$.
- Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, le sous-espace $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I)$ est appelé **sous-espace propre de $A$ associé à $\lambda$.**

REMARQUE **8.1.**
• Rien ne nous dit qu'il existe toujours des valeurs propres par contre en cas d'existence il n'y a pas unicité des vecteurs propres associés. Plus précisément $\lambda \in Sp(A) \iff Ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$ et donc $dim\big(Ker(A-\lambda I)\big) \geqslant 1$.
• Pour déterminer l'ensemble des valeurs propres de $A$ on doit donc en théorie résoudre l'équation matricielle $AX = \lambda X \iff (A - \lambda I_n)X = 0$ ce qui revient donc à résoudre un un système linéaire à paramètre (par pivot).

**EXERCICE 8.1. Matrice Attila**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la somme des lignes de la matrice $A$ puis en déduire un vecteur propre et une valeur propre.

PROPRIÉTÉ 8.2 (Caractérisation des valeurs propres)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda$ est une valeur propre de $A$.
2. Il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.
3. $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$
4. $rg(A - \lambda I) < n$
5. la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

REMARQUE **8.2.**
Le fait que $A$ soit inversible est équivalent au fait que 0 **n'est pas** une valeur propre de $A$.

**EXERCICE 8.2. Matrice Attila encore**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $0 \in Sp(A)$.

**EXERCICE 8.3. Cas d'une matrice** $2 \times 2$
Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉ 8.3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A$ possède au plus $n$ valeurs propres distinctes.

Bien sûr lorsque la matrice $A$ est triangulaire il est particulièrement aisé de déterminer ses valeurs propres :

**PROPRIÉTÉ 8.4 (Spectre d'une matrice triangulaire)**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

REMARQUE **8.3.**
Si une matrice est triangulaire, on "lit" directement son spectre sur la matrice. Remarquons également qu'une matrice diagonale est triangulaire (supérieure et inférieure).

Cela ne marche que pour des matrices **triangulaires**, c'est totalement faux en général !

On ne peut pas déterminer les valeurs propres d'une matrice par pivot de Gauss !

**PROPRIÉTÉ 8.5 (Matrices semblables et éléments propres)**

Soient $A$ et $B$ deux matrices semblables.
Alors
$$Sp(A) = Sp(B)$$

La propriété ne parle que de valeurs propres, elle ne dit pas que tout vecteur propre de $A$ est un vecteur propre de $B$.
$\rightsquigarrow$ En général, si $A = PBP^{-1}$ et $X$ est un vecteur propre de $A$ alors $Y = P^{-1}X$ est un vecteur propre de $B$ associé à la même valeur propre.
En effet :
$$BY = (P^{-1}AP)(P^{-1}X) = P^{-1}AX = P^{-1}(\lambda X) = \lambda\left(P^{-1}X\right) = \lambda Y \quad \textit{(calcul à savoir refaire)}$$

### Recherche de valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur

Remarquons que lorsque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors en apliquant le critère d'inversibilité des matrices $2 \times 2$, on obtient que $\lambda \in Sp(A)$ si et seulement si $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$ où l'on a noté $tr(A) = a + d$ et $det(A) = ad - bc$.
La fonction polynômiale $p_A : x \mapsto x^2 - tr(A)x + det(A)$ est intéressante car ses racines sont précisément les valeurs $x = \lambda$ où $\lambda$ est une valeur propre de $A$.
On peut également remarquer que si on remplace $x$ par la matrice $A$, l'expression $p_A(A) = A^2 - tr(A)A + det(A)I_2$ a un sens (par opérations matricielles) et on peut montrer aisément que quelque soit la matrice $A$ on a $p_A(A) = 0_2$.
Autrement dit $p_A$ s'annule également en l'appliquant à la matrice $A$ !
Cette remarque suggère une méthode plus générale de recherche des valeurs propres d'une matrice.

**DÉFINITION 8.6 (Polynôme annulateur)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p(x) = a_k x^p + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ une fonction polynômiale à coefficients réels.

- On définit l'**évaluation de** $p$ **en** $A$ par $p(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$.
- On dit que $p$ est un **polynôme annulateur de** $A$ si $p(A) = 0_n$.

REMARQUE **8.4.**
L'intérêt des polynômes annulateurs réside dans la détermination des valeurs propres :

**PROPRIÉTÉ 8.7 (Polynômes annulateurs et valeurs propres)**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p$ un polynôme annulateur de $A$.
Alors toute valeur propre de $A$ est une racine de $p$, autrement dit :

$$Sp(A) \subset \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ p(x) = 0\right\}.$$

Attention, la propriété ne dit pas que toutes les racines de $p$ sont des valeurs propres de $A$ ! Les racines de $p$ sont les valeurs propres possibles de $A$ . Encore faut-il s'assurer que ce sont bien des valeurs propres.

REMARQUE **8.5.**
Cette propriété simplifie grandement la recherche des valeurs propres d'une matrice puisque si l'on dispose d'un polynôme annulateur (souvent donné dans les énoncés), il suffit de chercher les valeurs propres parmi l'ensemble (fini) des racines du polynôme et on évite ainsi la résolution du système à paramètre !

**EXERCICE 8.4.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$ puis en déduire que $A$ n'admet pas de valeur propre (réelle).

**EXERCICE 8.5. Matrice Attila**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$, en déduire un polynôme annulateur de $A$, puis le spectre de $A$.

## 8.2 Matrices diagonalisables

**DÉFINITION 8.8**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.
Autrement dit, s'il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

REMARQUE **8.6.**
Une matrice n'est pas nécessairement diagonalisable. C'est le cas de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $Sp(A) = \emptyset$.

**PROPRIÉTÉ 8.9 (cas des matrices ayant une unique valeur propre)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A) = \{\lambda\}$.
Alors :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff A = \lambda I_n.$$

REMARQUE **8.7.**
La propriété précédente, qu'il faudra bien re-démontrer le jour J, est la plupart du temps utilisée pour démontrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable. En effet, la matrice donnée dans l'énoncé peut très bien n'avoir qu'une seule et unique valeur propre mais elle ne sera très probablement pas égale à une matrice du type $\lambda I_n$. En raisonnant par l'absurde, nous pourrons donc démontrer que cette matrice n'est pas diagonalisable.

**EXERCICE 8.6.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^3$, en déduire un polynôme annulateur de $A$ puis le spectre de $A$.

2. Montrer par l'absurde que $A$ n'est pas diagonalisable.

En se rappelant que deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ représentent le même endomorphisme $f$ (disons de $\mathbb{R}^n$) dans deux bases différentes, on interprêtera la relation $A = PDP^{-1}$ comme une formule de changement de bases pour l'endomorphisme $f$. On en déduit une caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice :

**THÉORÈME 8.10 (Caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$A$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$.

**Plus précisément :**
$A$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ et telles que :
- $\leadsto$ les éléments diagonaux de $D$ sont les valeurs propres de $A$.
- $\leadsto$ les vecteurs colonnes de $P$ forment une base de $\mathscr{M}_{n,1)(\mathbb{R})}$ formée de vecteurs propres de $A$.

REMARQUE **8.8.**
1. Le couple $(P, D)$ de matrices n'est pas unique. L'ordre des valeurs propres et vecteurs propres associés conduisant à des choix différents. Par ailleurs un vecteur de base pouvant être remplacé par un vecteur qui lui est colinéaire, il est possible, pour une même matrice $D$ d'obtenir plusieurs matrices $P$ convenables.
2. La recherche d'une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$, nécessite bien sûr de connaître le spectre de $A$ puis d'avoir déterminé une base de chacun des sous-espaces propres associés.
Supposons par exemple que $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ et qu'après calculs nous ayons déterminés des bases $\mathscr{B}_{\lambda_1}, ..., \mathscr{B}_{\lambda_r}$ associées aux sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A), ..., E_{\lambda_r}(A)$. Les familles de vecteurs de chacune de ces bases sont bien sûr libres mais qu'en est-il de la réunion (on dira *concaténation*) de tous ces vecteurs ? Autrement dit, peut-on affirmer que la famille $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{B}_{\lambda_i}$ forme une famille libre ? Le résultat crucial suivant permet de conclure :

**PROPRIÉTÉ 8.11 (Principe de concaténation)**

Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres **différentes** forme une famille libre.

REMARQUE **8.9.**
Par conséquent, si à l'issue de la concaténation des différentes bases des sous-espaces propres de $A$ on obtient une famille de $n$ vecteurs alors, d'après le résultat précédent, la famille ainsi obtenue formera une famille libre de $n$ vecteurs et donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Cette base ainsi construite sera formée de vecteurs propres de $A$ et donc on pourra affirmer que $A$ est diagonalisable. En d'autres termes :

**THÉORÈME 8.12 (Caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$.
Alors :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^{r} dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) = n.$$

**COROLLAIRE 8.13**

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $card(Sp(A)) = n$, alors $A$ est diagonalisable.

REMARQUE **8.10.**
Ces deux résultats devront toujours être re-démontrés le jour J.

**Méthode : Diagonaliser une matrice**

**Diagonaliser une matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **c'est trouver une matrice inversible** $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **et une matrice diagonale** $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **telles que :**

$$A = PDP^{-1}.$$

Pour diagonaliser $A$, on procède en général de la façon suivante :

- on détermine son spectre (éventuellement à l'aide d'un poynôme annulateur),
- on détermine une base de chaque sous-espace propre associés aux différentes valeurs propres,
- on concatène tous les vecteurs propres obtenus pour former (éventuellement) une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
- on forme la matrice $P$ dont les colonnes sont les vecteurs ainsi obtenus, c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans cette nouvelle base, cette matrice $P$ est donc nécessairement inversible,
- on forme la matrice $D$ diagonale dont les éléments diagonaux correspondent (dans l'ordre) aux valeurs propres des différents vecteurs propres de constituants les colonnes de $P$,
- on écrit la relation $A = PDP^{-1}$.

**EXERCICE 8.7.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^3 = A$, en déduire le spectre de $A$.
2. Diagonaliser $A$.

THÉORÈME 8.14 (ADMIS - Cas particulier des matrices symétriques )

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

REMARQUE **8.11.**
Ce résultat permet de répondre très succinctement par l'affirmative à une question du type “la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?” lorsqu'on reconnait une matrice symétrique. En revanche ce théroème ne nous dispense pas de diagonaliser la matrice.

## 8.3 Applications à l'étude des puissances d'une matrice

De nombreuses situations venant de domaines parfois assez éloignés (probabilités, équations différentielles, études de suites) se ramène assez souvent à l'étude d'une relation du type $U_{n+1} = AU_n$ et donc à l'étude des puissances de $A$ puisque dans ces conditions on obtient aisément la relation $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme nous l'avons vu, la relation $A = PDP^{-1}$ conduit à la relation $A^n = PD^nP^{-1}$ et réduit drastiquement le calcul des puissances de $A$ dans le cas où $A$ est diagonalisable puisque $D$ étant diagonale il est particulièrement aisé d'en déduire $D^n$. C'est le cas le plus favorable.

Lorsque la matrice $A$ n'est pas diagonalisable, ce qui est systématiquement le cas lorsqu'elle ne possède qu'une seule valeur propre, il est possible dans certains cas (et en suivant bien sûr les questions posées) de déterminer une matrice triangulaire $T$ et une matrice inversible $P$ telles que $A = PTP^{-1}$. C'est à dire, une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé est triangulaire. Là encore le calcul des puissances de $A$ va être réduit (bien que ce soit plus complexe que le cas diagonalisable) et nous devront passer par le calcul des puissances de $T$ selon la relation $A^n = PT^nP^{-1}$.

Si $A$ n'a qu'une valeur propre, disons $\lambda = 1$ pour fixer les choses, alors $T$ aura elle aussi $\lambda = 1$ pour seule et unique valeur propre. Etant à la fois triangulaire, on pourra écrire $T = I + N$ avec $N$ une matrice *nilpotente* (terme hors programme). Une des puissances de $N$ s'annule, disons $N^2$ pour fixer les idées. Mais alors toutes puissances supérieures de $N$ s'annule aussi puisque pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0$ (notons que $N^{k-2}$ n'a de sens que si $k \geqslant 2$).

Il sera alors possible de calculer les puissances de $T$ à l'aide de la formule bien connue suivante :

**THÉORÈME 8.15 (formule du binôme de Newton matriciel)**

Supposons que $A$ et $B$ soient deux matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ (on dit que $A$ et $B$ commutent), alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Reprenons le cas où $T = I+N$ avec $N^2 = 0$. On peut bien sûr appliquer cette formule puisque la matrice $I$ commute avec n'importe quelle matrice. Et il en est de même des matrices de la forme $\lambda I$.
Cette méthode permet d'exprimer $T^n$ comme une combinaison linéaire de $I$ et de $N$.
En effet, pour $n \geqslant 2$ :

$$\begin{aligned}
T^n &= (I+N)^n \\
&= (N+I)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \underbrace{I^{n-k}}_{=I} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= \tbinom{n}{0} N^0 + \tbinom{n}{1} N^1 + \tbinom{n}{k} N^k + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k}_{=0} \qquad \text{puisque } \forall k \geqslant 2, \quad N^k = 0 \\
&= I + nN
\end{aligned}$$

Bien sûr comme on a choisit $n \geqslant 2$, il est nécessaire de vérifier si la formule reste vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

Maintenant comme $N = T - I$ on peut exprimer $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $T$.
En effet :

$$\begin{aligned} T^n &= I + nN \\ &= I + n(T - I) \\ &= nT - (n-1)I. \end{aligned}$$

Enfin en appliquant la relation $A^n = PT^nP^{-1}$ on obtient finalement $A^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $A$.
En effet :

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} \\ &= P\big(nT - (n-1)I\big)P^{-1} \\ &= nPTP^{-1} - (n-1)PIP^{-1} \\ &= nA - (n-1)I. \end{aligned}$$

### Exemple d'application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

**EXERCICE 8.8.**
On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynomiale $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

1. **Valeurs propres de** $M$
   (a) Montrer que $Q$ est un polynôme annulateur de $M$.
   (b) Vérifier que $\lambda = 1$ est racine de $Q$ puis factoriser $Q$.
   (c) En déduire $Sp(M)$ puis déterminer les dimensions des sous-espaces propres associés.
   (d) La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?
2. **Réduction de la matrice** $M$**.**
   Soit $(E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = (U, V, W)$ la famille de vecteurs définie par :
   $$U = 4E_1 + 2E_2 + E_3 \qquad V = E_1 + E_2 + E_3 \qquad W = 2E_1 + E_2.$$
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$.
   (b) Exprimer $MU, MV$ et $MW$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) Déterminer la matrice $T = P^{-1}MP$.
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. **Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses premiers termes $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $u_2 = 0$ et par la relation de récurrence suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$
   Pour tout entier naturel $n$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
   (a) Vérifier que pour tout entier naturel $n$ : $U_{n+1} = MU_n$ puis établir par récurrence que pour tout entier naturel : $U_n = M^nU_0$.
   (b) Donner l'expression de $P^{-1}$ puis en déduire $u_n$ en fonction de $n$.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?