

RÉVISIONS DE PREMIÈRE ANNÉE

Calculs et Récurrences

Exercice 1 : Récurrences

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$.

2. Rappeler la formule de Pascal.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$.

3. Soient A, D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$.

Exercice 2 : Calculs de sommes finies

1. Rappeler les formules de sommes (finies) du cours de première année.

2. Montrer que $\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}$.

3. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^{2n}}$.

4. Calculer $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

5. Rappeler la formule du binôme de Newton et calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k$.

6. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket : k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

En déduire la valeur, pour tout $x \in \mathbb{R}$ de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 3 : Limites de suites

Étudier la convergence des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3n^2 - n + 6}{3n - 2n^3} \quad b_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \quad c_n = \frac{3^n - 2^n}{5^n - (-1)^n} \quad d_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n} \quad e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

Exercice 4 : Séries usuelles

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

$$(1) \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}, \quad (2) \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}, \quad (3) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{n!}.$$

Algèbre linéaire**Exercice 5 : Base**

Montrer que la famille de vecteurs $((-1, 0, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 6 : Equation matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On présentera les résultats sous forme d'un Vect.

Exercice 7 : Binôme de Newton matriciel

Déterminer à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances A^n où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Analyse**Exercice 8 : Inégalité classique**

Montrer que : $\forall x < -1, \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 9 : Dérivabilité

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Exprimer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. La fonction est-elle dérivable en 0 ? Quelles sont les conséquences graphiques ?

Exercice 10 : Limite (ultra) classique

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 11 : Approximation d'une limite

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Déterminer un encadrement de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ à 0,2 près, en s'appuyant sur la question précédente. Quel réel cet encadrement permet-il d'approcher ?
3. Compléter la fonction Python suivante permettant de déterminer une valeur approchée de la limite de u_n à une précision fournie par l'utilisateur :

```

1 def limite( precision ):
2     u = .....
3     n = .....
4     while .....:
5         u = .....
6         n = .....
7     return .....
```

Exercice 12 : Suites d'un autre type

1. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n^2$.
 - (a) Montrer que l'on peut définir une suite en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.
 - (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - (c) En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n .
2. On considère la suite définie par $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 2^n$.
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Calculer $\sum_{k=1}^n v_k$.
 - (b) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
 - (c) La série de terme général v_n est-elle convergente ?

Exercice 13 : Equations différentielles

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

- en appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2
- en faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 14 : Equations différentielles encore

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

$$(1) y'' - 3y' + 2y = 0, \quad (2) y'' - 4y' + 4y = 0, \quad (3) y'' - 2y = 0.$$

Exercice 15 : Intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
(b) En déduire la valeur de I_0 .
2. (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Etablir que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
(c) En déduire que $(I_n)_n$ est convergente.
3. (a) Justifier l'inégalité : $\forall x \in [0, 1], x^n \ln(1+x) \leq x^n$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}.$$

(c) En déduire un encadrement de I_n .

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

Graphes

Exercice 16 :

Soit G un graphe non orienté de sommets s_1, \dots, s_n et de matrice d'adjacence $a = (a_{ij})$.

1. Rappeler la définition du degré d'un sommet d'un graphe non-orienté.
2. Rappeler la définition de la matrice d'adjacence A puis expliquer comment calculer les degrés des sommets de G à l'aide des lignes de la matrice A .
3. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def degres(A)` : qui prend en argument une matrice carrée A étant la matrice d'adjacence d'un graphe G et renvoie la liste des degrés des sommets du graphe G .

Exercice 17 :

Soit G un graphe non orienté de sommets s_1, \dots, s_n et de matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$.

On appelle *liste d'adjacence d'un sommet* s_i d'un graphe G , la liste des sommets s_j adjacents à s dans le graphe G , c'est à dire les sommets ayant une arête de G en commun avec s . Et on appelle *liste d'adjacence* d'un graphe G , la liste de toutes les listes d'adjacence des sommets de G .

1. Ecrire la liste d'adjacence du graphe complet d'ordre 4.
2. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def matrix_to_list(A)` : qui prend en argument une matrice carrée A étant la matrice d'adjacence d'un graphe G et renvoie la liste d'adjacence de ce graphe.

Probabilités

Exercice 18 : Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .
La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?
Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = \frac{1}{2}$?

Exercice 19 : Deuxième Pile

Soit $p \in]0, 1[$.

On dispose d'une pièce de monnaie qui amène Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $q = 1 - p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus au cours des lancers.

1. (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
(b) Plus généralement, déterminer la loi de X , c'est à dire les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ (à déterminer).
(c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
2. Que peut-on dire de l'événement "on n'obtient jamais deux Pile au cours d'une infinité de lancers de pièces"?
3. Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.
4. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire X :

```

1 def simuleX(p):
2     n_pile=0
3     n_lancer=1
4     while ..... :
5         if ..... :
6             .....
7             .....
8     return .....
```

Exercice 20 : Khûbes

Soit $n \geq 2$.

Une urne contient $n - 1$ boules blanches et une boule noire. On dispose de la fonction Python suivante qui renvoie la simulation de deux variables aléatoires X et Y .

```

1 def simuleXY(n):
2     nN = 1
3     X = 0
4     k = 0
5     while nN == 1 :
6         k = k+1
7         p = nN / n
8         boule = rd.binomial(1,p)
9         if X == 0:
10            X = boule*k
11            if 2*np.floor(k/2) != k :
12                nN = nN-boule
13                n = n-1
14            Y = k
15     return [X,Y]
```

1. Décrire une expérience aléatoire et ce à quoi correspondent les variables X et Y .
2. Déterminer la loi de Y .