

# RÉVISIONS DE PREMIÈRE ANNÉE

## CORRECTION

### Calculs et Récurrences

**Exercice 1 : Récurrences**

**Corrigé en cours.**

**Exercice 2 : Calculs de sommes finies**

1. **Corrigé en cours.**

2. **Corrigé en cours.**

3. **Corrigé en cours.**

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) && \text{par propriété du ln} \\ &= \ln(n) - \ln(1) && \text{par télescopage} \\ &= \ln(n) \end{aligned}$$

5. **Corrigé en cours.**

6. Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{par définition} \\ &= \frac{n(n-1)}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k && \text{le 1er terme étant nul} \\ &= \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k && \text{d'après ce qui précède} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k && \text{par linéarité de la somme} \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i+1} && \text{par changement d'indice } i = k - 1 \\ &= nx \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i && \text{en sortant } x \text{ de la somme} \\ &= nx(1+x)^{n-1} && \text{à l'aide de la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

**Exercice 3 :** Limites de suites

**Corrigé en cours.**

**Exercice 4 :** Séries usuelles

**Corrigé en cours.**

## Algèbre linéaire

**Exercice 5 :** Base

**Corrigé en cours.**

**Exercice 6 :** Equation matricielle

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2y+z \\ x+z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z = 0 \\ x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0. \end{cases}$$

Ainsi les solutions de  $AX = 0$  sont de la forme  $X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$  avec  $z \in \mathbb{R}$ .

Présentation sous forme de Vect : en notant  $F$  l'ensemble des solutions de cette équation, il vient

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

**Exercice 7 :** Binôme de Newton matriciel

**Corrigé en cours.**

## Analyse

### Exercice 8 : Inégalité classique

Montrons que :  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ .

Soit  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$  définie sur  $] -1; +\infty[$ .

$f$  est dérivable par théorèmes généraux et de plus :  $\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ .

On obtient donc le tableau de variations suivant :

$x$	-1	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de $f$			

On en déduit donc :  $\forall x > -1, f(x) \leq 0 \iff \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ .

### Exercice 9 : Dérivabilité

**Corrigé en cours.**

### Exercice 10 : Limite (ultra) classique

Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .

En passant à la forme exponentielle on a :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

De plus :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{avec } x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or on sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  donc on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ .

Ainsi par continuité (en 1) de la fonction exponentielle on en déduit  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}}$ .

### Exercice 11 : Approximation d'une limite

**Corrigé en cours.**

### Exercice 12 : Suites d'un autre type

1. On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n^2$ .

(a) Il suffit de montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . A l'aide des propriétés du logarithme on obtient.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln(3u_n^2) \\ &= \ln(3) + 2\ln(u_n) \\ &= \ln(3) + 2v_n \\ &= av_n + b \end{aligned}$$

Avec  $a = 2$  et  $b = \ln(3)$ .

**Rappel : suites arithmético-géométrique de type  $u_{n+1} = a_n + b$**

**Point fixe :** on note  $\ell$  l'unique solution de l'équation  $x = ax + b$ .

**Suite auxiliaire :** on pose  $v_n = u_n - \ell$ . La suite  $v_n$  est géométrique de raison  $q = a$  et de terme initial  $v_0 = u_0 - \ell$ .

**Forme générale des solutions :**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - \ell)a^n + \ell$ .

Ainsi la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique de point fixe vérifiant l'équation  $\ell = -\ln(3)$ .

En posant  $w_n = v_n - \ell = v_n + \ln(3)$ , on montre que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = 2$  et de terme initial  $w_0 = \ln(3)$ ; ce qui nous permet d'obtenir l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

$$w_n = \ln(3)2^n \Rightarrow v_n = \ln(3)2^n - \ln(3)$$

$$\text{Ccl: } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(3)(2^n - 1)}$$

(c) La relation  $v_n = \ln(u_n)$  donne  $u_n = e^{v_n}$ .

$$u_n = e^{v_n} = e^{\ln(3)(2^n - 1)} = 3^{2^n - 1}$$

$$\text{Ccl: } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2^n - 1}}$$

2. On considère la suite définie par  $u_1 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 2^n$ .

(a) **Rappel : sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique**

$$\sum_{k=p}^n q^k = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En remarquant que  $u_{n+1} - u_n = 2^n$  d'après la définition de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n v_k &= \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k \\ &= 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= 2(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Ccl: } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n v_k = 2(2^{n+1} - 1)}$$

(b) **Rappel : sommes/séries télescopiques**

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

**Théorème :** La série télescopique  $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et de plus -, en cas de convergence on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$$

La somme  $\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$  est une somme télescopique, donc on en déduit :  $\sum_{k=1}^n v_k = u_{n+1} - u_1$ .

Par conséquent, d'après la question précédente, on en déduit  $u_{n+1} - 5 = 2(2^n - 1)$ .

$$\text{Ccl: } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2(2^n - 1) + 5}$$

(c) La série télescopique  $\sum_n v_n = \sum_n (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Or d'après la question précédente,  $u_n = 2(2^n - 1) + 5 \rightarrow +\infty$ .

Ccl : La série  $\sum_n v_n$  diverge.

**Exercice 13 :** Equations différentielles

Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $y'' - y' = 0$  de deux manières différentes :

- en appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 :
  - $\rightsquigarrow$  équation caractéristique associée :  $x^2 - x = 0 \iff x(x - 1) = 0$
  - $\rightsquigarrow$  deux racines distinctes :  $r_1 = 0$  et  $r_2 = 1$ .
  - $\rightsquigarrow$  forme générale des solutions :  $y : t \mapsto \lambda e^{0 \cdot t} + \mu e^{1 \cdot t}$  soit  $y : t \mapsto \lambda + \mu e^t$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
- en faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :
  - $\rightsquigarrow$  changement de fonction inconnue : on pose  $z = y'$ .
  - $\rightsquigarrow$  EDH1 associée :  $z' = y'' \Rightarrow z' - z = 0$ .
  - $\rightsquigarrow$  Résolution de l'EDH1 associée :  $z : t \mapsto \lambda e^t$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - $\rightsquigarrow$  Résolution de l'EDH2 initiale : on a  $z = y'$  donc  $y$  est une primitive de  $z$ . On détermine  $y$  en primitivant la fonction  $z(t) = \lambda e^t$  soit  $y : t \mapsto \mu + \lambda e^t$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

**Remarque :** le rôles des réels  $\lambda$  et  $\mu$  n'est pas significatif, ce sont des constantes.

**Exercice 14 :** Equations différentielles encore

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

- (1)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ :
  - $\rightsquigarrow$  équation caractéristique associée :  $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff \Delta = 1$  donc avec  $\Delta > 0$ .
  - $\rightsquigarrow$  deux racines distinctes :  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2$ .
  - $\rightsquigarrow$  forme générale des solutions :  $y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
- (2)  $y'' - 4y' + 4y = 0$  :
  - $\rightsquigarrow$  équation caractéristique associée :  $x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0$  donc avec  $\Delta = 0$ .
  - $\rightsquigarrow$  une unique racine :  $r_0 = 2$ .
  - $\rightsquigarrow$  forme générale des solutions :  $y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{2t}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
- (3)  $y'' - 2y = 0$  :
  - $\rightsquigarrow$  équation caractéristique associée :  $x^2 - 2x = 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$  donc avec  $\Delta > 0$ .
  - $\rightsquigarrow$  deux racines distinctes :  $r_1 = \sqrt{2}$  et  $r_2 = -\sqrt{2}$ .
  - $\rightsquigarrow$  forme générale des solutions :  $y : t \mapsto \lambda e^{\sqrt{2}t} + \mu e^{-\sqrt{2}t}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 15 :** Intégrales

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

1. (a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; 1]$  par produit de fonctions elles-mêmes dérivables et en utilisant la règle du produit on trouve :

$$g'(x) = \ln(1+x).$$

- (b) On déduit de la question précédente que  $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$  est une primitive de  $x \mapsto \ln(x+1)$ .  
D'où le calcul suivant :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= [g(x)]_0^1 \\ &= g(1) - g(0) \\ &= 2\ln(2) - 1 \quad \text{puisque } g(0) = 0. \end{aligned}$$

2. (a) Montrons que  $I_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

On remarque tout simplement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  représente l'intégrale d'une fonction positive. En effet, pour tout  $x \in [0; 1]$  d'une part  $x^n \geq 0$  et d'autre part :

$$x + 1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) \geq 0 \quad \text{par croissance de la fonction } \ln.$$

On conclut ensuite par suivante :

### Croissance de l'intégrale

- Soient  $f, g$  deux fonction continues sur  $[a; b]$  telles que  $f \geq g$  sur  $[a; b]$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

- En particulier si  $f \geq 0$  sur  $[a; b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .
- De plus, si  $f \geq 0$  sur  $[a; b]$  et  $\int_a^b f(t) dt = 0$  alors  $f = 0$  sur  $[a; b]$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in [0; 1], \quad x^n \ln(1+x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \geq 0.$$

par croissance de l'intégrale

Conclusion : Ceci montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geq 0$ .

**Remarque** : cette question ne se traite pas par récurrence ; en effet pour une récurrence nous avons généralement besoin d'exprimer une relation de récurrence au préalable, ce que nous n'avons pas à ce stade.

- (b) Montrons que la suite  $(I_n)_n$  est décroissante.

Le plus simple ici consiste à étudier le signe de la différence  $I_{n+1} - I_n$  et d'utiliser la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x) dx - \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \\ &= \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) \ln(1+x) dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 x^n (x-1) \ln(1+x) dx. \end{aligned}$$

On conclut en étudiant le signe de la fonction "à intégrer"  $x \mapsto x^n(1-x) \ln(1+x)$  sur  $[0; 1]$  :

Ainsi pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$\begin{cases} x^n \geq 0 \\ 1-x \leq 0 \\ \ln(1+x) \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^n(1-x) \ln(1+x) \leq 0.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale on en déduit :

$$\int_0^1 \underbrace{x^n(1-x) \ln(1+x)}_{\leq 0} dx \leq 0.$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} - I_n \leq 0$  ce qui démontre que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

- (c) D'après les questions précédentes, la suite  $(I_n)_n$  est décroissante et minorée par 0, elle converge donc en vertu du théorème de convergence monotone.

**Remarque** : à ce stade nous ne pouvons pas affirmer qu'elle converge vers 0. C'est l'objet des questions suivantes.

3. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0; 1]$ , nous avons alors

$$\ln(1+x) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x^n \ln(1+x) \leq \ln(2)x^n \leq x^n \quad (\text{puisque } \ln(2) \leq 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^n \ln(1+x) \leq x^n}.$$

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall x \in [0; 1], \quad x^n \ln(1+x) \leq x^n \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n dx \quad \Leftrightarrow \quad I_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

par croissance de l'intégrale

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n dx &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

(c) D'après la question 2.(a) et la question précédente, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut en utilisant le théorème d'encadrement.

Conclusion :  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$ .

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

En posant  $\begin{cases} u = \ln(1+x) & \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x} \\ v' = x^n & \Rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ , les fonctions  $u$  et  $v$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ , par intégration par parties nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx &= \left[ \frac{x^{n+1} \ln(1+x)}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) dx \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

Conclusion :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx}$ .

(b) Selon le même raisonnement, nous allons encadrer la fonction "à intégrer" et utiliser le principe de croissance de l'intégrale.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\forall x \in [0; 1] \quad 1+x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \text{par croissance de l'intégrale} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx.$$

Or par un calcul immédiat on a :  $\int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$ .

Conclusion :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}}$ .

(c) L'encadrement précédent, permet d'obtenir d'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \leq -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq 0.$$

Or, d'après la question 4.(a) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

Ce qui donne donc l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

(d) En multipliant tout par  $n \geq 0$  on en déduit l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\ln(2)n}{n+1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)} \leq nI_n \leq \frac{\ln(2)n}{n+1}.$$

Or  $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On en déduit que les deux suites "encadrantes" tendent vers  $\ln 2$  et donc, par théorème d'encadrement, que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \ln(2)}$$

## Graphes

Non traités (sera vu plus tard).

## Probabilités

**Exercice 16 :** Loi géométrique  
**Corrigé en cours.**

**Exercice 17 :** Deuxième Pile

Soit  $p \in ]0, 1[$ .

On dispose d'une pièce de monnaie qui amène Pile avec probabilité  $p$  et Face avec probabilité  $q = 1 - p$ .

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois Pile. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus au cours des lancers.

**Formalisme :** notons  $P_k$  l'événement "la pièce donne Pile au  $k$ -ième lancer" et  $F_k = \overline{P_k}$ .

1. (a) Déterminons  $P(X = 0)$  et  $P(X = 1)$  :

- $(X = 0)$  signifie qu'on a fait aucun Face avant le deuxième Pile c'est-à-dire que lors des deux premiers lancers on a fait 2 Pile.

Ainsi

$$(X = 0) = P_1 \cap P_2 \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) = p^2.$$

par indépendance des lancers

$(X = 1)$  signifie qu'on a fait un Face avant le deuxième Pile c'est-à-dire que lors des trois premiers lancers on a fait 2 Pile et un Face ; il y a donc deux possibilités pour le Face au 1er ou au 2ème lancer?

Ainsi

$$\begin{aligned} (X = 1) &= (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \Rightarrow \quad P(X = 1) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= p^2 q + p^2 q \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= 2p^2 q. \end{aligned}$$

(b) Plus généralement,  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  car le nombre de Face avant le 2ème Pile peut prendre toutes les valeurs entières.

De plus, pour  $k \in X(\Omega)$  l'événement  $(X = k)$  signifie que l'on a fait  $k$  fois Face avant le 2ème Pile. Cela signifie donc qu'il y a eu  $k + 2$  lancers et que le dernier lancer est un Pile. La seule chose qui varie est donc la position du 1er Pile qui peut arriver au 1er lancer, au 2ème lancer, ... ou au  $k + 1$ -ième lancer.

Ainsi :

$$(X = k) = (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}) \cup \dots \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap P_{k+2})$$

Soit :

$$(X = k) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{k+1} \cap P_{k+2})$$

Et donc

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{k+1} \cap P_{k+2})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} p^2 q^k \quad \text{par indépendance et car il y a } k \text{ Face et 2 Pile} \\ &= p^2 q^k \sum_{i=1}^{k+1} 1 \quad \text{car } p^2 q^k \text{ ne dépend pas de } i \\ &= p^2 q^k (k + 1) \quad \text{car il y a } (k + 1) \text{ termes dans la somme.} \end{aligned}$$

Conclusion : La loi de  $X$  est donnée par  $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = (k + 1)p^2 q^k \end{cases}$ .

(c) Vérifions que  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$ .

### À retenir : on ne demande pas de démontrer que la série converge

Contrairement à de nombreuses questions faisant intervenir les séries dans cette question on ne demande pas de prouver la convergence avant de faire le calcul de la somme d'une série. On prendra quand même la précaution de s'intéresser à la condition  $|q| < 1$  permettant d'effectuer le calcul.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)p^2 q^k \\
 &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k \\
 &= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \quad \text{par changement d'indice } n = k+1 \\
 &= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{on reconnaît une } \Sigma \text{ géom dérivée d'ordre 1 de raison } q = 1-p \in ]0; 1[ \\
 &= \frac{p^2}{p^2} \quad \text{car } q = 1-p \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2. L'événement "on n'obtient jamais deux Pile au cours d'une infinité de lancers de pièces" est de probabilité nulle puisque contenu dans le contraire de l'événement  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = k)$  qui est de probabilité 1.

### À retenir : système complet d'événement (SCE) associé à une variable aléatoire $X$

- Un SCE est une suite (finie ou infinie) d'événement  $(A_k)_{k \in I}$  tels que :

$$(1) \text{ les } A_k \text{ sont 2 à 2 incompatibles} \qquad (2) \bigcup_{k \in I} A_k = \Omega.$$

- Lorsque  $X$  est une variable aléatoire de support  $X(\Omega)$  (fini ou infini), alors la suite  $((X = k))_{k \in I}$  est un SCE.

### 3. À retenir : montrer qu'une variable admet une espérance

L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  est définie par une somme

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k).$$

• **Cas où le support  $X(\Omega)$  est fini :** dans ce cas la somme précédente existe autrement dit  $X$  **admet une espérance** et le calcul de la somme fait intervenir des sommes usuelles finies (telles que les sommes d'entiers, de carrés ou de cubes, des sommes finies de termes géométriques ou bien la formule du binôme de Newton).

• **Cas où le support  $X(\Omega)$  est infini :** dans ce cas la somme précédente est une série et il est alors nécessaire d'établir dans un premier la convergence (absolue) de cette série existe : autrement dit  $X$  **admet une espérance** si et seulement si la série  $\sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = k)$  converge absolument. Dans un second temps on calcule la somme en faisant intervenir des sommes de séries usuelles (telles que les sommes des séries géométriques ou exponentielles).

- **Etape 1 :** Montrons que la variable  $X$  de support infini  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  admet une espérance en montrant la convergence absolue de la série  $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ .

Remarquons que tous les termes de cette série étant positifs, il suffit en réalité de montrer que la série converge.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} kP(X = k) &= \sum_{k \geq 0} k(k+1)p^2 q^k \\
 &= p^2 \sum_{k \geq 0} k(k+1)q^k \\
 &= p^2 \sum_{n \geq 1} (n-1)nq^{n-1} \quad \text{en posant } n = k+1 \\
 &= p^2 q \sum_{n \geq 1} (n-1)nq^{n-2} \\
 &= p^2 q \sum_{n \geq 2} (n-1)nq^{n-2} \quad \text{car le 1er terme est nul}
 \end{aligned}$$

On reconnaît donc une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison  $q = 1-p \in ]0; 1[$ .

Donc la série  $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$  et donc la variable  $X$  admet une espérance.

- **Etape 2 :** on calcule l'espérance  $E(X)$  en calculant la somme de la série à l'aide du cours :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) &= p^2 q \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) n q^{n-2} \\ &= p^2 q \times \frac{2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{p^2 q}{p^3} \text{ puisque } p = 1 - q \\ &= \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Conclusion : La variable  $X$  admet une espérance et  $E(X) = \frac{q}{p}$ .

4. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire  $X$  :

```

1 def simuleX(p):
2     n_pile=0
3     n_lancer=1
4     while n_pile<2 :
5         if rd.random()<p :
6             n_pile+=1
7         n_lancer+=1
8     return n_lancer-2

```

**Explication :**

- on lance la pièce et si elle fait Pile on ajoute 1 à `n_pile` et si elle fait Face on ne touche pas à `n_pile` mais dans tous les cas on ajoute 1 à `n_lancer`.

Et on continue ces opérations TANT QUE le 2ème Pile n'est pas arrivé donc `while n_pile<2 :`

- la ligne de commande `if rd.random()<p :` teste si la pièce fait Pile
- on demande à sortir `n_lancer-2` puisque  $X$  représente le nombre de Face avant le 2ème Pile ; à la fin il y a donc `n_lancer-2` Face et 2 Pile.