Suites

Suites arithmétiques

- (u_n) est arithmétique de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier n
- Pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$ et plus généralement, $u_n = u_p + (n-p)r$
- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

- (u_n) est géométrique de raison q si $u_{n+1} = u_n \times q$ pour tout entier n
- Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$ et plus généralement, $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Variations

- (u_n) est une suite croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier n
- (u_n) est une suite décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier n

Pour étudier les variations d'une suite, on peut :
- Utiliser le cours si la suite est arithmétique ou géométrique
- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- Etudier si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (uniquement dans le cas d'une suite dont tous les termes sont strictement positifs)

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

Rappels de première (spécialité) : lien1
variations, suites arithmétiques et géométriques, calculs de sommes

Rappels de terminale (niveau maths complémentaires) : limites lien 2

Pour les étudiants ayant suivi la spécialité maths en terminale, l'étude des suites arithmético-géométriques n'est pas exigible pour l'entrée en prépa ECG. Nous étudierons ces suites particulières pendant la première année.

➢ Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1 (correction)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Calculer u_{10} et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 (correction)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = -2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Calculer u_4.

Exercice 3 (correction)
Déterminer le terme général des suites suivantes, puis leur limite.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - 2u_n = 0$ et $u_1 = 2$

b) Pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$ et $v_0 = 3$.

c) Pour tout $n > 0$, $w_{n+1} - w_n = 3$ et $w_1 = 10$.

Exercice 4 (correction)
On note S_n la somme des n premiers termes d'une suite (u_n). Déterminer l'expression de S_n en fonction de n dans les cas suivants :

a) $u_n = 12 \times (0,4)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $u_n = 4n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de terme initial $u_1 = 5$.

➢ Utilisation de suites arithmétiques et géométriques

Exercice 5 (correction)
Soit u une suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.

1. On pose $v_n = u_n + n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

Exercice 6 (correction)
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 6$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Etudier la convergence de la suite (u_n).

➢ **Variations**

Exercice 7 (correction)

Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

a) $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

b) $u_n = n^2 - 4n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) $u_n = n - 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

d) $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = n^2 + u_n$

e) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

➢ **Limites**

Exercice 8 (correction)

Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2}{3n+4}$ b) $u_n = \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ c) $u_n = (3 - \sqrt{n})\,(n^2 + 4)$

d) $u_n = 2^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ e) $u_n = \dfrac{1}{1 - e^n}$ f) $u_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{2 + \frac{1}{n}}$

Exercice 9 (correction)

Parmi les expressions suivantes, indiquer celles qui font apparaître des formes indéterminées lorsque n (on ne demande pas de déterminer la limite)

$a_n = e^n - n^2$ $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} - 2^n$ $c_n = \dfrac{2}{1-3n}$ $d_n = \dfrac{2^n + n^3}{n+1}$

$e_n = n + \sqrt{n}$ $f_n = \dfrac{4 * 0.2^n}{n^2 - 3}$ $g_n = 4^n - 3^n$ $h_n = \ln(n) \times \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 10 (correction)

Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = n - 2n^2$ b) $u_n = \dfrac{-3n+4}{n^2-1}$ c) $u_n = \dfrac{5^n + 3^n}{4^n}$

Correction - Suites

Exercice 1 (énoncé) $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{5}{2}$ et de terme initial $u_0 = -5$ donc $u_n = u_0 + nr = -5 + \dfrac{5}{2}n$.

$u_{10} = -5 + \dfrac{5}{2} \times 10 = 20$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2}n = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2 (énoncé) $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = -2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de terme initial $u_1 = 4$
$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times (-2)^{n-1} = (-2)^2 \times (-2)^{n-1} = (-2)^{n+1}$.
$u_4 = (-2)^5 = -32$

Exercice 3 (énoncé)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - 2u_n = 0$ et $u_1 = 2$
$u_{n+1} = 2u_n$ donc (u_n) géométrique de raison 2 et $u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.
Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) Pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$ et $v_0 = 3$.

(v_n) géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc $v_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

c) Pour tout $n > 0$, $w_{n+1} - w_n = 3$ et $w_1 = 10$.
$w_{n+1} = w_n + 3$ donc (w_n) arithmétique de raison 3.
$w_n = w_1 + 3(n-1) = 10 + 3(n-1) = 7 - 3n$
$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

Exercice 4 (énoncé)

a) $u_n = 12 \times (0,4)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: (u_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \\
&= 12 + 12 \times 0,4 + 12 \times (0,4)^2 + \cdots + 12 \times (0,4)^{n-1} \\
&= 12\left(1 + 0,4 + \cdots + 0,4^{n-1}\right) \\
&= 12 \times \frac{1 - 0,4^n}{1 - 0,4} \\
&= 12 \times \frac{1 - 0,4^n}{0,6} \\
&= 12 \times \frac{1 - 0,4^n}{\frac{6}{10}} \\
&= \cancel{12} \times \frac{10}{\cancel{6}} \times (1 - 0,4^n) \\
& 20 \times (1 - 0,4^n)
\end{aligned}$$

b) $u_n = 4n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (u_n) est une suite arithmétique

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= (4 \times 1 - 3) + (4 \times 2 - 3) + \cdots + (4 \times n - 3) \\
&= 4 \times (1 + 2 + \cdots + n) - 3 \times n \\
&= 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n \\
&= 2n(n+1) - 3n \\
&= 2n^2 + 2n - 3n \\
&= 2n^2 - n
\end{aligned}$$

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de terme initial $u_1 = 5$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 5 \times (\frac{1}{4})^{n-1}$

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= 5 + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\
&= 5 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\
&= 5 \times \frac{1 - \frac{1}{4}^n}{1 - \frac{1}{4}} = 5 \times \frac{1 - \frac{1}{4}^n}{\frac{3}{4}} \\
&= 5 \times \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{20}{3} - \frac{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Exercice 5 (énoncé)

(u_n) est définie par $u_{n+1} = 2u_n + n$ et $u_0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + n + 1$

   Donc $v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1) + 1$
   $$= 2u_n + n + n + 2$$
   $$= 2(u_n + n + 1)$$
   $$= 2v_n$$
   (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

2. Le terme initial de (v_n) est $v_0 = u_0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$ donc $v_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

   Comme $v_n = u_n + n + 1$, on a $u_n = v_n - n - 1$ donc $u_n = 2^{n+1} - n - 1$.

Exercice 6 (énoncé)

$u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$ et $v_n = u_n - 6$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2$

   Or $v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$

   Ainsi, $v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 = \frac{1}{3}v_n$

   (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_1 = u_1 - 6 = 1 - 6 = -5$

   donc $v_n = v_1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = -5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

2. $u_n = v_n + 6$ donc $u_n = 6 - 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

3. $u_n = 6 - 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} = 6 - 5 \times 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} = 6 - 15 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

   Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} = 0$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -15\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} = 0$

   Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

Exercice 7 (énoncé)

a) $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$

Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \left(2 - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$
$$= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{-n + (n+1)}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

Or $\dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est croissante.

b) $u_n = n^2 - 4n + 3$ pour $n \geqslant 2$.

Pour $n \geqslant 2$, $u_{n+1} - u_n = \big((n+1)^2 - 4(n+1) + 3\big) - \big(n^2 - 4n + 3\big)$
$$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 3 - n^2 + 4n - 3$$
$$= 2n - 3$$

Or pour $n \geqslant 2$, $2n \geqslant 4$ donc $2n - 3 > 0$ et ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$: (u_n) est croissante.

c) $u_n = n - 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \big(n + 1 - 2^{n+1}\big) - (n - 2^n)$
$$= n + 1 - 2 \times 2^n - n + 2^n$$
$$= 1 - 2^n$$

Or $2^n \geqslant 1$ donc $1 - 2^n \leqslant 0$ et ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite (u_n) est décroissante.

d) $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante

e) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3^{n+2}}{2^{n+1}}}{\dfrac{3^{n+1}}{2^n}} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{3}{2} > 1$$

<u>Comme $u_n > 0$</u> pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) est croissante

Rédaction alternative : $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n} = \dfrac{3 \times 3^n}{2^n} = 3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2} > 1$ avec $u_0 = 3$ donc la suite (u_n) est croissante

Exercice 8 (énoncé)

a) $u_n = \dfrac{2}{3n+4}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+4 = +\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) $u_n = \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

c) $u_n = \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 2\right)(n^2+4)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 2\right) = -2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+4 = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

d) $u_n = 2^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

e) $u_n = \dfrac{1}{1-e^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ car $e > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^n = -\infty$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

f) $u_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{2+\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 9 (correction)

$a_n = e^n - n^2$ forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

$b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} - 2^n$ pas de forme indéterminée car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

(donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$)

$c_n = \dfrac{2}{1-3n}$: pas de forme indéterminée car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-3n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$

$d_n = \dfrac{2^n+n^3}{n+1}$ forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

$e_n = n + \sqrt{n}$ pas de forme indéterminée car $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$

$f_n = \dfrac{4*0.2^n}{n^2-3}$ pas de forme indéterminée car $|0,2| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4*0.2^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2-3} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$

($\dfrac{0}{\infty}$ n'est pas une forme indéterminée)

$g_n = 4^n - 3^n$ forme indéterminée du type $+\infty - \infty$ car $4 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

$h_n = \ln(n) \times \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ de forme indéterminée du type $\infty \times 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Exercice 10 (énoncé)

a) $u_n = n - 2n^2 = n(1-2n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-2n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b) $u_n = \dfrac{-3n+4}{n^2-1} = \dfrac{n\left(-3+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{-3+\frac{4}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3 + \dfrac{4}{n} = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3+\frac{4}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} = -3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $u_n = \dfrac{5^n+3^n}{4^n} = \dfrac{5^n}{4^n} + \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{5}{4} > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$