Chapitre1

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SUITES ET APPLICATIONS À L'ÉTUDE DES SÉRIES

1.1 Étude asymptotique des suites

L'étude asymptotique d'une suite consiste à étudier le comportement de la suite lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Bien sûr, on s'intéresse à la convergence ou la divergence de la suite mais on souhaite aller plus loin dans cette étude et par exemple comparer "les vitesses de convergence" entre deux suites qui ont la même limite. En particulier lorsque ces deux suites ont une limite nulle ou infinie.

1.1.1 Négligeabilité de deux suites

DÉFINITION 1.1

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note

$$u_n = o(v_n)$$

s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle qu'à partir d'un certain rang :

$$u_n = \varepsilon_n v_n$$

REMARQUE **1.1.**
Cette relation de négligeabilité n'est pas symétrique, au sens que les écritures $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$ ne sont certainement pas possibles simultanément (sauf si ces deux suites sont nulles à partir d'un certain rang).

L'ordre dans lequel on place les suites a donc une importance capitale.

EXERCICE 1.1.

1. Montrer que $n = o(n^2)$ et $n^2 = o(n^3)$.
2. Plus généralement, si $0 < a < b$, montrer que $n^a = o(n^b)$.

PROPRIÉTÉ 1.2 (Caratérisation de la négligeabilité)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \text{ converge vers } 0.$$

EXERCICE 1.2.

1. Traduire la relation $u_n = o(1)$.
2. Que dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$?

Certaines propriétés restent compatible avec la relation de négligeabilité :

PROPRIÉTÉ 1.3

Transitivité :	Si	$u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$	alors,	$u_n = o(w_n)$
Stablité par produit par un scalaire réel	Si	$u_n = o(w_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$	alors,	$\lambda u_n = o(v_n)$
Compatibilité par produit	Si	$u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$	alors,	$u_n v_n = o(w_n x_n)$
Combinaison linéaire:	Si	$u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$	alors,	$\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$

Dans la dernière propriété on notera bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux négligeables devant la même suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche il serait absurde d'écrire $u_n - v_n = o(0)$ qui n'est vraie uniquement si $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang.

De même si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$ alors la propriété ne permet pas de dire que $u_n + w_n = o(v_n + x_n)$.

Terminons par une réécriture des croissances comparées à l'aide de la négligeabilité :

THÉORÈME 1.4 (croissances comparées revisitées)

1. Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\boxed{\left(\ln(n)\right)^b = o\left(n^a\right)}$.
2. Pour tout $a > 0$ et tout $q > 1$, $\boxed{n^a = o\left(q^n\right)}$ *Rem. forme exponentielle :* $q^n = e^{\ln(q)n}$.

REMARQUE **1.2.**

Bien sûr par transitivité on a, pour tout $b > 0$ et tout $q > 1$, $\boxed{\left(\ln(n)\right)^b = o\left(q^n\right)}$.

EXERCICE 1.3. Classer par ordre de négligeabilité :

1. $u_n = n^2, \quad v_n = n\ln n, \quad w_n = \sqrt{n}, \quad x_n = 2^n$ et $z_n = e^n$.
2. $a_n = n^3, b_n = \dfrac{1}{n^2}, c_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}, d_n = \dfrac{1}{n}, e_n = (-1)^n, f_n = 2^n + 3^n, g_n = 5^n, h_n = e^{\sqrt{n}}, j_n = \sqrt{n} + n\ln(n) + n^{10000} + \dfrac{1}{n}$.

1.1.2 Equivalence de deux suites

DÉFINITION 1.5

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **équivalentes** et on note

$$u_n \sim v_n$$

s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle qu'au partir d'un certain rang :

$$u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$$

Attention à ne pas écrire à la légère $u_n \sim 0$ qui n'est possible que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, ni $u_n \sim \infty$ qui n'a tout simplement pas de sens !

EXERCICE 1.4. Montrer que :

1. $2n^2 + -3n + 4 \sim 2n^2$
2. $\dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^2} \sim -\dfrac{4}{\sqrt{n}}$

PROPRIÉTÉ 1.6 (caractérisation de l'équivalence)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \text{ converge vers } 1.$$

COROLLAIRE 1.7 (équivalents de suites polynômiales)

- Toute suite polynomiale est équivalente à son monôme de plus haut degré.

$$a_p n^p + ... + a_1 n + a_0 \quad \sim \quad a_p n^p \quad \text{(avec } a_p \neq 0)$$

- Tout quotient de suite polynomial est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré :

$$\frac{a_p n^p + ... + a_1 n + a_0}{b_q x^q + ... + b_1 x + b_0} \quad \sim \quad \frac{a_p n^p}{b_q x^q} \quad \text{(avec } a_p, b_q \neq 0).$$

L'intérêt principal de la recherche d'équivalent est la détermination de limites.

PROPRIÉTÉ 1.8

Si deux suites sont équivalentes et si l'une des deux converge vers une limite (finie ou infinie) alors l'autre converge vers la même limite.

Démonstration : Evident puisque $u_n = v_n \times w_n$ où la suite $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1.

A l'inverse la connaissance d'une limite permet de déterminer un équivalent à n'oublier sous aucun prétexte :

PROPRIÉTÉ 1.9

$$\text{Si } \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ avec } \ell \in \mathbb{R} \text{ et } \ell \neq 0, \text{ alors } \boxed{u_n \sim \ell}.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la caractérisation de l'équivalence des suites.

EXERCICE 1.5. Déterminer un équivalent simple de $e^{1+\frac{1}{n}}$.

REMARQUE **1.3.**
- Si $\ell = 0$, on n'écrira pas $u_n \sim 0$ qui n'a pas vraiment de sens (voir plus haut).
- On en déduit que deux suites convergeant vers une même limite non nulle sont équivalentes. Ce n'est pas le cas pour des suites convergeant vers 0, ni pour deux suites divergeant toutes vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La relation d'équivalence des suites vérifie les trois propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1.10

Transitivité :	$u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$	$\Rightarrow$	$u_n \sim w_n$
Symétrie :	$u_n \sim v_n$	$\Rightarrow$	$v_n \sim u_n$
Réflexivité :		$u_n \sim u_n$	

Examinons l'effet des opérations usuelles sur les équivalents :

PROPRIÉTÉ 1.11

Produit par un scalaire réel :	$u_n \sim v_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$\Rightarrow$	$\lambda u_n \sim \lambda v_n$
Produit :	$u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$	$\Rightarrow$	$a_n u_n \sim b_n v_n$
Puissance entière :	$u_n \sim v_n$ et $k \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$(u_n)^k \sim (v_n)^k$
Puissance réelles pour suites positives :	$u_n \sim v_n$ et sont positives ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\Rightarrow$	$(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$
Quotient :	$u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$	$\Rightarrow$	$\dfrac{u_n}{a_n} \sim \dfrac{v_n}{b_n}$

EXERCICE 1.6. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chaque cas :

1. $u_n = \left(2n - \sqrt{n}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2}\right)$
2. $v_n = \dfrac{1-5n^2}{(-2n^3+2n^2-3n-1)^3}$

On n'additionne pas les équivalents

Additivité :	Si	$u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$	alors	$a_n + u_n \sim b_n + v_n$
Composition par une fonction :	Si	$u_n \sim v_n$	alors	$e^{u_n} \sim e^{v_n}$ $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$

On ne compose pas les équivalents

EXERCICE 1.7. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2n}{2n^3+n+\sqrt{3}}$
2. $v_n = (n^3+2n^2+5)(3n+1)e^n$
3. $w_n = \dfrac{(2n^3-n+1)^4}{(-3n^4+n^2-1)^5}$
4. $x_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

Enfin, lors de la recherche d' un équivalent simple d'une suite, on s'appuie sur les opérations précédentes et sur quelques cas d'équivalents usuels à connaître :

PROPRIÉTÉ 1.12 (Equivalents usuels)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow 0$.
Alors :

$$\boxed{\ln(1+u_n) \sim u_n} \quad \boxed{e^{u_n} - 1 \sim u_n} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad \boxed{(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n}.$$

Démonstration : Limites usuelles issues de la dérivabilité pour les 2 premiers. Pour l'exposant α : passer par une exponentielle et appliquer les équivalents précédents.

REMARQUE **1.4.**
Cas particuliers : toujours si $u_n \longrightarrow 0$:

- pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\boxed{\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2}}$.
- pour $\alpha = -1$, $\boxed{\frac{1}{1+u_n} - 1 \sim -u_n}$.

EXERCICE 1.8. Déterminer un équivalent de $(n+1)^\alpha - n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, de $\ln\left(2+\frac{3}{n}\right)$ puis de $e^{1-\sqrt{\frac{n+1}{n}}} - 1$.

1.2 Compléments sur les séries

1.2.1 Rappels des généralités

DÉFINITION 1.13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle : on appelle **série de terme général** u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se note traditionnellement $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, à ne pas confondre avec

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ qui est appelée la **somme partielle** d'indice n de la série.

DÉFINITION 1.14 (Convergence)

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge**.
Sa limite est appelée la **somme de la série** et est notée :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

De même, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors la série est dite **divergente**.

Attention à ne pas confondre les trois notations $\underbrace{\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n}_{\textbf{série}}$, $\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}_{\textbf{somme partielle}}$ et $\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k}_{\textbf{somme}}$.

On fera aussi attention aux points suivants:

(i) L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens *que si la série converge*. Mais on emploiera les écritures $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ pour désigner toute série (convergente ou divergente).

(ii) **Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies**, puisqu'on ne peut les écrire que si on a établi auparavant la convergence des séries concernées. On travaillera donc d'abord sur les sommes partielles S_n qui sont finies, puis on fera, si possible, tendre n vers $+\infty$.

À retenir : calculer la somme d'une série convergente

Pour calculer la somme d'une série convergente on procèdera en deux étapes :
• **Etape 1 :** on prouve la convergence de la série en utilisant des arguments liés à la suite des sommes partielles ou par opérations habituelles (linéarité ou changement d'indice) ou en reconnaissant des séries usuelles convergentes.
• **Etape 2 :** en cas de convergence on calcule la somme de la série en déterminant (si possible) la limite de la suite des sommes partielles puis en appliquant les formules des sommes des séries usuelles (séries géométriques ou exponentielles).

1.2.2 Propriétés

PROPRIÉTÉ 1.15 (Condition nécessaire de convergence d'une série)

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ CV} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$$

Dit autrement (contraposée) : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ DV}$

Mais la réciproque est fausse. $\cancel{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ CV}}$

Exemple : Etudions la nature de la série harmonique $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$.

PROPRIÉTÉ 1.16 (Opérations sur les séries convergentes)

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries.

- Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ et $\mu \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sont de même nature et si les séries convergent, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
- Si les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont convergentes alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est convergente et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
- Dit autrement, l'ensemble des séries convergentes est **stable par combinaisons linéaires**.

1.2.3 Séries télescopiques

DÉFINITION 1.17

On appelle **somme télescopique** une somme pouvant s'écrire $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

PROPRIÉTÉ 1.18

La série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge SSI la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
En cas de convergence on a la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n - u_0.$$

EXERCICE 1.9. Justifier la convergence des séries suivantes puis en déduire leur somme :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \text{ et } \sum_{k\geqslant 1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

1.2.4 Séries de référence

THÉORÈME 1.19

La série des entiers naturels DV vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

La série des carrés diverge vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

THÉORÈME 1.20 (Série de Riemann)

La **série de Riemann** $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant1}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$

De plus,

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty}_{\textbf{Série harmonique}} \qquad \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2}_{\textbf{Série harmonique alternée}}\right) \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \textit{(Hors programme)}.$$

THÉORÈME 1.21 (Séries géométriques)

Pour tout entier N et **pour tout réel** $q \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Plus généralement,

$$\sum_{n=i}^{N} q^n = \frac{\underbrace{q^i}_{\text{1er terme qui y est}} - \underbrace{q^{N+1}}_{\text{1er terme qui n'y est pas}}}{1-q}$$

Les **séries géométriques** $\sum_{n\geqslant k} q^n$ $\sum_{n\geqslant1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent SSi $|q| < 1$,

et dans ce cas :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q} \qquad \text{(avec } k \geqslant 0)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{(série géom. dérivée première)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \qquad \text{(série géom. dérivée seconde)}$$

REMARQUE **1.5.**
Concrètement, vous rencontrerez essentiellement ces séries lors de calculs de probabilité, d'espérance ou de variance de variables aléatoires discrètes.

THÉORÈME 1.22 (Série exponentielle)

La **série exponentielle** est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

EXERCICE 1.10. Montrer la convergence de $\sum_{n\geqslant0} \frac{5\times 2^n + 2\times 3^n}{4^n}$, $\sum_{k\geqslant0} \frac{(-1)^n}{n!}$ et de $\sum_{n\geqslant0} \frac{n^2}{3^n}$ Puis calculer leur somme.

1.2.5 Critère de convergence des série à termes positifs

On s'intéresse aux séries dont le terme général est positif ou le devient à partir d'un certain rang.
La suite des sommes partielles est alors **croissante**, donc elle converge si elle est majorée et diverge vers $+\infty$ sinon.
Pour étudier la nature de ces séries, il suffit de comparer leur terme général.

THÉORÈME 1.23 (critère de comparaison)

Soient $\sum u_n$ et $\sum V_n$ deux séries telles que à partir d'un certain rang :

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

EXERCICE 1.11. Etudier par comparaison la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$.

THÉORÈME 1.24 (critère de négligeabilité)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que :

$$\begin{array}{l} u_n \geqslant 0 \\ v_n \geqslant 0 \end{array} \quad \text{et} \quad u_n = o(v_n)$$

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 1.12. Etudier par négligeabilité la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^{5/2}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-\sqrt{n}}$ en comparant le terme général avec $\dfrac{1}{n^2}$

THÉORÈME 1.25 (critère d'équivalence)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que :

$$\begin{array}{l} u_n \geqslant 0 \\ v_n \geqslant 0 \end{array} \quad \text{et} \quad u_n \sim v_n$$

la série $\sum u_n$ converge SSi la série $\sum v_n$ converge.
On dit que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de mêmes natures.

EXERCICE 1.13. Etudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

À retenir : étudier la nature d'une série à termes positif

Il faut travailler sur son **terme général**.

1. Se ramener par équivalent, négligeabilité ou inégalité à
   un terme général **plus simple** et **positif**.
2. Le comparer à une série de référence (s'il ne l'est pas lui-même) puis conclure.

1.2.6 Série dont le terme général a un signe fluctuant

Bien sûr il existe des suites dont le terme fluctue, comme par exemple la suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Il n'existe pas de méthode générale fine au programme pour étudier ce genre de série, par contre, la première chose à essayer, c'est de se ramener au cas positif c'est à dire montrer l'absolue convergence de la suite.

DÉFINITION 1.26

La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

THÉORÈME 1.27 (Admise)

$$\sum |u_n| \quad \text{CV} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \text{CV.}$$

EXEMPLE. Etude de la convergence de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

1.2.7 Comparaison série - intégrale

On part d'une fonction $f : t \mapsto f(t)$ définie, positive et décroissante sur un intervalle de type $[a;+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$) telle que $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 0$ et on s'intéresse à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ où $n_0 \geqslant a$.

Comparaison d'une série avec une intégrale

1. On utilise la décroissance de f : $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [k;k+1]$:
$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$
2. On intègre l'inégalité
$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$
3. On somme les inégalités pour $n_0 \leqslant k \leqslant n$ (attention, aux bornes !)
$$\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$$
4. Manipulation sur les sommes pour obtenir les mêmes sommes partielles :
$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k) - f(1) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - f(n)$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \int_{n_0}^{n} f(t)dt + f(n) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)dt + f(1).$$
5. On en déduit l'équivalence suivante $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \sim \int_{n_0}^{n} f(t)dt$.
6. On calcule (si possible !) l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)dt$ et on en déduit la nature de la série.

EXERCICE 1.14. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt$ puis en déduire la nature de la série de Bertrand : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.