

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Introduction

Une équation différentielle permet de modéliser l'évolution d'un phénomène dynamique dans un temps continu. Pour des modèles possédant plusieurs paramètres qui varient simultanément, on peut être amené à obtenir plusieurs équations différentielles couplées. Illustrons ceci sur un exemple de modèle monétariste inflation-chômage.

Ce modèle repose sur quatre équations structurelles.

- La première équation exprime le taux de croissance des salaires W en fonction du taux de chômage U et du taux d'inflation anticipé I :

$$(1) \quad W(t) = -\beta U(t) + hI(t) \quad \text{avec } \alpha, \beta > 0, \quad \text{et } 0 \leq h \leq 1.$$

- La deuxième équation décrit le taux d'inflation réel i en fonction du taux de croissance des salaires et du taux de croissance de la productivité du travail (supposé constant) :

$$(2) \quad i(t) = W(t) - T.$$

- La troisième équation décrit la variation du taux d'inflation anticipé I par rapport au taux d'inflation réel i :

$$(3) \quad I'(t) = j(i(t) - I(t)), \quad \text{avec } 0 < j \leq 1.$$

- La quatrième équation décrit la variation du taux de chômage U en fonction du taux d'inflation réel i et du taux de croissance de la masse monétaire (supposé constant) :

$$(4) \quad U'(t) = -k(m - i(t)), \quad \text{avec } 0 < k \leq 1.$$

En combinant judicieusement ces équations, on arrive au système :

$$\begin{cases} I'(t) &= j(h-1)I(t) - j\beta U(t) + j(\alpha - T) \\ U'(t) &= khI(t) - k\beta U(t) - k(m + T - \alpha) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système dont les fonctions $I : t \mapsto I(t)$ et $U : t \mapsto U(t)$, dérivables sur \mathbb{R}^+ , sont inconnues : on parle de **système différentiel**.

Résoudre ce système différentiel consiste à déterminer les fonctions I et U et ainsi déterminer des prévisions socio-économiques à plus ou moins long terme concernant ici le taux d'inflation anticipé et le taux de chômage en fonction du temps.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

EXERCICE 10.1. Déterminer la matrice A associée au système différentiel homogène suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) + z(t) \end{cases}$$

Un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants généralise donc la notion d'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants vue en première année. Nous avons vu qu'en imposant une condition initiale, une telle équation admettait une solution unique. Il en va de même pour un système différentiel :

THÉORÈME 10.3 ((Admis) Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On appelle **problème de Cauchy** la recherche de n fonctions x_1, x_2, \dots, x_n dérivables sur I telles que, l'on ait

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $t_0 \in I$ sont donnés.

- Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $t_0 \in I$, il existe une unique solution au problème de Cauchy associé.

10.1.2 Résolution pratique

Pour la mise en œuvre pratique de la résolution, on ne disposera pas d'une méthode générale permettant d'obtenir les solutions dans n'importe quel cas. On se limitera aux cas où la matrice A associée au système est diagonalisable et de taille 2 ou 3.

Avant de traiter ce cas étudions dans un premier temps le cas plus simple où la **matrice A est diagonale**. Dans ce cas, on peut résoudre directement utilisant nos connaissances de première année.

PROPRIÉTÉ 10.4 (Cas où la matrice est diagonale)

- Les solutions du système différentiel $\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$ sont de la forme :

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}, \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Tarduction matricielle :

- les solutions du système différentiel $Y'(t) = DY(t)$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont de la forme :

$$Y(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

PROPRIÉTÉ 10.5 (Cas où la matrice est diagonalisable)

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ et on suppose A diagonalisable.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres de A .

X est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow Y = P^{-1}X$ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = DY(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ où $Y_0 = P^{-1}X_0$.

REMARQUE 10.3.

1. L'avantage est que, d'après la propriété 4, l'on sait résoudre le système "réduit". On remonte ensuite à la solution du système initial par un simple produit matriciel, puisque $X = PY$.
2. Il faudra re-démontrer ce résultat le jour J.

Résolution d'un système différentiel dans le cas où la matrice associée est diagonalisable

On considère le système différentiel d'écriture matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est la matrice colonne des inconnues du système.}$$

On procède selon les étapes suivantes :

1. On diagonalise la matrice A : on cherche ses valeurs propres et une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres, de sorte à obtenir une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et on résout le système différentiel réduit $Y'(t) = DY(t)$.

3. On applique la relation $X = PY$ où Y contient les solutions précédemment trouvées pour obtenir

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ sous forme explicite.}$$

4. Le cas échéant, si la condition initiale est donnée, on cherche la valeur des constantes présentes dans la solution trouvée telle que $X(t_0) = X_0$.

REMARQUE 10.4.

On peut modifier légèrement l'ordre des étapes de résolution dans le cas où on cherche la solution à un problème de Cauchy : après l'étape 2, il est possible de déterminer l'unique solution Y telle que $Y(t_0) = P^{-1}X_0$ de sorte qu'on obtiendra ensuite directement l'unique solution X cherchée lors de l'étape 3 en calculant PY .

L'inconvénient de ce choix est qu'il nécessite de déterminer P^{-1} , alors que ce n'est en aucun cas nécessaire sinon. Mais il faut être conscient du fait que si l'on procède dans l'ordre présenté dans la méthode précédente, alors on pourra être conduit à résoudre un système lors de la dernière étape.

EXERCICE 10.2.

$$\text{Résoudre sur } \mathbb{R} \text{ le système différentiel } \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases} \text{ avec la condition initiale } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = -1 \end{cases} .$$

REMARQUE 10.5.

Dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable, il n'y a rien à connaître : la marche à suivre sera fournie par l'énoncé. Il pourra par exemple nous amener à montrer que A est semblable à une matrice triangulaire, ce qui peut ensuite permettre de résoudre le système différentiel toujours par l'intermédiaire d'un changement de base.

REMARQUE 10.6.

En revenant aux équations différentielles linéaires homogènes du second ordre, nous pouvons observer qu'elles peuvent se ramener à un système différentiel : Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $(E) : y'' + ay' + by = 0$ (a et b étant des constantes).

On peut montrer aisément que y est solution de (E) sur $\mathbb{R} \iff X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel $X' = AX$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Application : en utilisant la méthode de résolution vue auparavant, on peut constater qu'on retombe sur des expressions cohérentes avec les solutions trouvées en première année. En particulier l'équation caractéristique est l'équation permettant de déterminer les valeurs propres de la matrice A .

10.2 Évolution des solutions d'un système différentiel

10.2.1 Trajectoires

DÉFINITION 10.6

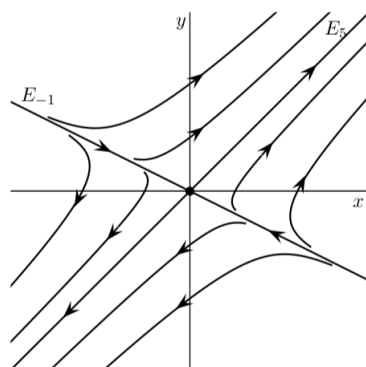
On considère un système différentiel (S) défini par $X'(t) = AX(t)$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On appelle **trajectoire** de (S) tout ensemble de points du plan du type $\mathcal{T} = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une solution de (S) .

REMARQUE 10.7. • On oriente parfois les trajectoires, dans le sens de t croissant.

- Étant donné qu'il y a une infinité de solutions à un système différentiel linéaire à coefficients constants, il existe une infinité de trajectoires. De plus, on peut prouver (hors de portée...) que deux trajectoires d'un même système différentiel sont soit disjointes soit confondues.

EXEMPLE. Voici quelques trajectoires d'un système différentiel $X'(t) = AX(t)$:



(b) Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les espaces propres sont $E_{-1} = \text{Vect}((-2, 1))$ et $E_5 = \text{Vect}((1, 1))$.

REMARQUE 10.8. • On pourrait démontrer que si $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ , alors la trajectoire du système différentiel associée à la condition initiale $X(t_0) = X_0$ est une demi-droite issue de l'origine et passant par le point (x_0, y_0) , orientée vers l'infini si $\lambda > 0$ et vers l'origine si $\lambda < 0$ (si $\lambda = 0$ alors chaque point de la demi-droite est une trajectoire à lui tout seul).

- La notion de trajectoire s'étend au cas d'une matrice A de taille 3 : dans ce cas, une trajectoire est un ensemble de points de l'espace du type $\mathcal{T} = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in I\}$ où $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est une solution du système.

10.2.2 Comportement asymptotique

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'évolution d'un système différentiel à très long terme, et sa traduction sur les trajectoires.

DÉFINITION 10.7 (État d'équilibre)

On dit appelle **état d'équilibre** du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants défini par $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toute solution constante du système.

Il est alors aisé de voir où chercher de tels états d'équilibre :

PROPRIÉTÉ 10.8

Soit $X'(t) = AX(t)$ un système différentiel de matrice associée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

X_* est un état d'équilibre si et seulement si $X_* \in \text{Ker}(A)$.

REMARQUE 10.9.

- L'origine $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ considéré comme une solution constante $t \mapsto (0, \dots, 0)$ est un état d'équilibre de tout système différentiel linéaire homogène.
- Si A est inversible, c'est-à-dire si 0 n'est pas valeur propre de A , alors O est l'unique état d'équilibre du système. Dans le cas contraire où $0 \in \text{Sp}(A)$, il existe une infinité d'états d'équilibre.

DÉFINITION 10.9 (Trajectoire stable)

Une trajectoire \mathcal{T}_0 d'un système différentiel sur $[t_0, +\infty[$ est dite **stable** si un « petit » écart sur le point initial $M_0(x(0), y(0), \dots)$ conduit à une trajectoire « assez proche » de la trajectoire \mathcal{T}_0 .

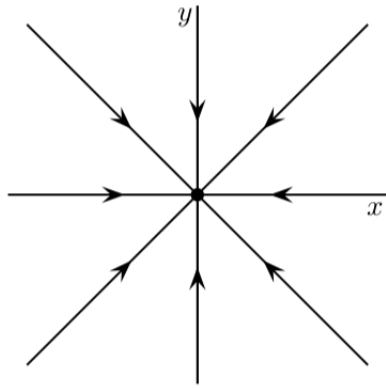
Mathématiquement, pour un système différentiel à deux équations, si l'on note $\mathcal{T}_0 = \{M(t), t \geq t_0\}$, la trajectoire est stable ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute trajectoire $\mathcal{T} = \{N(t), t \geq t_0\}$ telle que $N(t_0)M(t_0) \leq \delta$, on a $N(t)M(t) \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

REMARQUE 10.10.

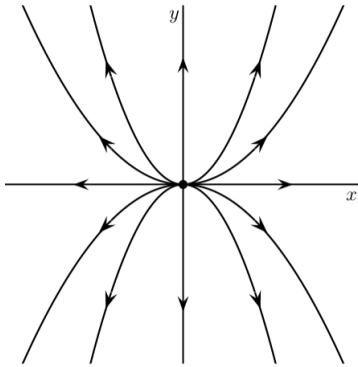
On parle également de **solution stable** car à toute trajectoire correspond une solution. Par exemple, l'origine O est toujours une trajectoire particulière (ne contenant qu'un seul point donc) pour un système différentiel homogène, c'est celle qui correspond à la solution nulle. Cette solution est stable si en partant d'une condition initiale proche

de l'origine, la trajectoire ne s'éloignera pas beaucoup de l'origine.

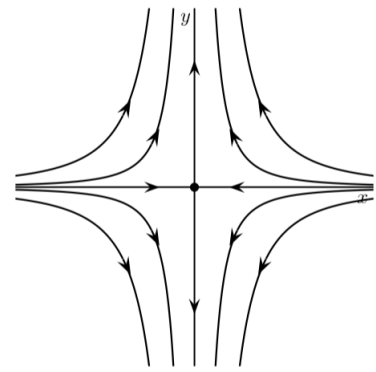
Revenons au cas $n = 2$ et à la situation où A est une matrice diagonalisable : on considère une trajectoire différente de l'origine $O(0,0)$. En notant $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base de vecteurs propres de A , associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 , on obtient comme solution $X(t) = \begin{pmatrix} au_1 e^{\lambda_1 t} + bv_1 e^{\lambda_2 t} \\ au_2 e^{\lambda_1 t} + bv_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors vérifier que les seuls comportements asymptotiques possibles sont les suivants :



$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$$



$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$$



$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$