FEUILLE D'EXERCICES

APPLICATIONS LINÉAIRES

EXERCICE 5.1. Applications linéaires / endomorphismes
Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires et préciser le cas échéant lorsque ce sont des endomorphismes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, 3x+y) \end{array}$
2. $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y) \end{array}$
3. $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ p & \mapsto & p'-p'' \end{array}$
4. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ p & \mapsto & p(x+1)-p(x-1) \end{array}$
5. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \mapsto & \mathbb{R}_2[x] \\ (a,b,c) & \mapsto & \big(x \mapsto (2a+c)x^2+(3a-2b+c)x+b\big) \end{array}$
6. $s : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d-b-c \end{array}$
7. $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$
8. $\rho : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & M+(b+c)I_2 \end{array}$

EXERCICE 5.2. Noyau et Image
Pour chacune de applications linéaires suivantes déterminer son noyau et son image :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-2x+4y, x-2y, x-2y) \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ p & \mapsto & \big(x \mapsto xp'(x)\big) \end{array}$
3. $s : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array}$

EXERCICE 5.3. Injectif / Surjectif
Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications linéaires suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, y+z) \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+b, c+d) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ p & \longmapsto & p'. \end{array}$

Endomorphisme associé à une matrice

EXERCICE 5.4. Rang matriciel, noyau, image
Détermine en un coup d'oeil, le rang, le noyau et l'image de la matrice dans chacun des cas suivants. Dire également si la matrice est inversible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.5. Sur le noyau matriciel
On considère la matrice suivante de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier **sans aucun calcul**, que A est inversible.
2. Vérifier que $A^4 = I_4$ et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
3. Déterminer une base et la dimension de $E_{-1} = Ker(A + I_4)$ et $E_1 = Ker(A - I_4)$.

EXERCICE 5.6. Type concours
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer trois vecteurs U, V, W de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que :
   - les coefficients de la deuxième ligne de U, V et W soient respectivement $-1, 1$ et 1 ;
   - (U) forme une base de $Ker(A)$;
   - $AV = -V$;
   - $Ker(A - I_3) = Vect(W)$
2. Vérifier $\big(U, V, W\big)$ forme une base $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note P la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs U, V, W dans cet ordre.
3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Vérifier que $P^{-1}AP = D$.
5. Calculer BU, BV et BW. Que pouvez vous dire de la matrice $P^{-1}BP$?

Matrices d'applications linéaires

EXERCICE 5.7. Matrice d'une application linéaire
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (4x - y, x + 2y, 3y)$.
Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.

EXERCICE 5.8. Matrice d'une application linéaire bis
Soit E un espace vectoriel de dimension 4, de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit f l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} f(e_1) &= 2e_1 - 3e_2 + e_3 + 4e_4 \\ f(e_2) &= e_1 + 2e_3 - 3e_4 \\ f(e_3) &= -2e_2 + 5e_3 + 2e_4 \\ f(e_4) &= 6e_1 - 4e_2 + 2e_3 + 7e_4 \end{cases}$. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

EXERCICE 5.9. Détermination de l'image à l'aide d'une matrice
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $Im(f)$.
2. Déterminer l'image de $p : x \mapsto x^2 + x - 1$.

EXERCICE 5.10. Détermination du noyau à l'aide d'une matrice Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques vaut $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de Ker f.

EXERCICE 5.11. Extrait de concours Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la famille $(f(e_3), f(e_4))$ est libre.
2. Vérifier que $f(e_1) = f(e_3) + f(e_4)$
3. En déduire une base de Im f puis la dimension de Im f et Ker f.
4. Que valent $f(e_2)$ et $f(e_1 - e_3 - e_4)$? En déduire une base de Ker f .
5. Quelle est la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base $\mathscr{B}$?

EXERCICE 5.12. Plus difficile
Soit E, un espace vectoriel de dimension 4 et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ une base de E.
Soit f, un endomorphisme de E vérifiant :

- $f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$
- $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
- $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_4$
- $f(\vec{e}_4) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\} : f \circ f(\vec{e}_k) = \vec{0}$.
2. En déduire que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, càd : $\forall u \in E, \quad f \circ f(u) = 0_E$.

Changement de base

EXERCICE 5.13. Matrice de passage
On donne $u = (1,0,0)$ $v = (-1,2,-2)$ $w = (3,-1,2)$

1. Écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ Ã Â la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$.

2. En déduire que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

EXERCICE 5.14. Matrice de passage bis
Soit $\mathscr{B} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$
Soit $\mathscr{B}' = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ une famille de polynômes non-nuls de $\mathbb{R}_3[x]$ de degrés échelonnés, c'est-à -dire telle que $\deg(q_i) = i$ pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$.

1. Écrire la forme de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la famille $\mathscr{B}'$

2. En déduire que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

EXERCICE 5.15. Changement de coordonnées
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On donne $e'_1 = (1,1,2,1)$ $e'_2 = (1,-1,0,1)$ $e'_3 = (0,0,-1,1)$ $e'_4 = (1,2,2,0)$

1. (a) Écrire la matrice P de la base $\mathscr{B}$ à la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$
   (b) En déduire que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer les coordonnées de $u = (1,1,1,1)$ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

EXERCICE 5.16. Formule de changement de base
On note $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

On pose $u = i + j + 2k$ $v = 3j + 2k$ $w = k$

1. Montrer que $f(u) = u$.

2. Soit $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ et P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la famille $\mathscr{B}'$

   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que P est inversible et déterminer l'inverse de P.
   (c) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (d) Par lecture de la matrice B , retrouver le résultat de la question 1) puis exprimer $f(v), f(w)$ en fonction de u, v, w.