Chapitre5

FEUILLE D'EXERCICES : APPLICATIONS LINÉAIRES

CORRECTION

Exercice 1 :Applications linéaires / endomorphismes

1. Corrigé en cours.

2. Montrons que l'application $\begin{array}{cccc}\Phi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y)\end{array}$ est linéaire.

   Soient $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl}\Phi(\lambda u+\mu v) & = & (\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z', \lambda x+\mu x'-(\lambda y+\mu y')) \\ & = & \lambda(x+y+z,x-y)+\mu(x',y',z',x'-y') \\ & = & \lambda\Phi(u)+\mu\Phi(v)\end{array}$$

3. Corrigé en cours.

4.

5. Montrons que l'application $\begin{array}{cccc}u: & \mathbb{R}_2[x] & \mapsto & \mathbb{R}_2[x] \\ & (ax^2+Bx+c) & \mapsto & \big((2a+c)x^2+(3a-2b+c)x+b\big)\end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

   • L'application u va bien de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}_2[x]$ de manière évidente.

   • Montrons que u est linéaire.

   Soient $P=ax^2+Bx+c$ et $Q=a'x^2+b'x+c'$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl}u(\lambda P+\mu Q) & = & \big(2(\lambda a+\mu a')+\lambda c+\mu c'\big)x^2+\big(3(\lambda a+\mu a')-2(\lambda b+\mu b')+\lambda c+\mu c'\big)x+\lambda b+\mu b' \\ & = & \big(\lambda(2a+c)+\mu(2a'+c')\big)x^2+\big(3(\lambda(3a-2b+c)+\mu(3a'-2b'+c')\big)x+\lambda b+\mu b' \\ & = & \lambda\big((2a+c)x^2+(3a-2b+c)x+b\big)+\mu\big((2a'+c')x^2+(3a'-2b'+c')x+b'\big) \\ & = & \lambda u(P)+\mu u(Q)\end{array}$$

6.

7. Montrons que l'application $\begin{array}{cccc}\Psi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & {}^tM\end{array}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   • L'application Ψ va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition de la transposée d'une matrice.

   • Montrons que Ψ est linéaire.

   Soient $(M,N)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcll}\Psi(\lambda M+\mu N) & = & {}^t(\lambda M+\mu N) & \\ & = & {}^t(M)+{}^t(\mu N) & \text{par linéarité de la transposée} \\ & = & \lambda\,{}^tM+\mu\,{}^tN & \text{par linéarité de la transposée} \\ & = & \lambda\Psi(M)+\mu\Psi(N) & \end{array}$$

8. Montrons que l'application $\begin{array}{rccc}\rho : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} & \longmapsto & M+(b+c)I_2\end{array}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   • L'application ρ va bien de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de manière évidente.

   • Montrons que ρ est linéaire.

   Soient $M=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d\end{array}\right), N=\left(\begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d'\end{array}\right)$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl}\rho(\lambda M+\mu N) & = & \lambda M+\mu N+(\lambda b+\mu b'+\lambda c+\mu c')I_2 \\ & = & \lambda(M+(b+c)I_2)+\mu\big(N+(b'+c')I_2\big) \\ & = & \lambda\rho(M)+\mu\rho(N)\end{array}$$

Exercice 2 :Noyau et Image

1. Assez facile.

2.

$$\begin{array}{rcl} Ker(u) & = & \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad | \quad a+d=0\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad | \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ & = & Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\end{array}$$

   Par ailleurs, il est assez facile de montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre (le faire !).

   <u>Conclusion :</u> $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $Ker(u)$ qui est donc de dimension 3.

3. En utlisant la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ on a

$$Im(u)=Vect\left(u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},u\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix},u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

   Or

$$u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=1 \quad u\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},=u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=0$$

   Donc,

$$\begin{array}{rcl} Im(u) & = & Vect(1,0) \\ & = & Vect(1)\end{array}$$

   <u>Conclusion :</u> (1) est une base de $Im(u)$ qui est donc de dimension 1.

   Remarque : Nous aurions pu raisonner de la façon suivante. Vu que $Im(u)$ est un SEV de $\mathbb{R}$ et que $dim(\mathbb{R})=1$ alors :

   - ou bien $dim(Im(u))=0$

   - ou bien $dim(Im(u))=1$.

   Or $dim(Im(u))=0$ entrainerait que u est l'endomorphisme nul (ce qui n'est pas le cas), donc c'est que l'on a $dim(Im(u))=1$.

Exercice 3 :Injectif - surjectif

1. • $Ker(f) = Vect((1,2,-2)) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ donc f n'est pas injective.

   • $Im(f) = Vect((2,0),(-1,1),(0,1)) = Vect((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$ donc f est surjective.

2. • $Ker(f) = Vect\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\right) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ donc f n'est pas injective.

   • $Im(f) = Vect((1,0),(1,0),(0,1),(0,1)) = Vect((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$ (pour raisons de dimensions) donc f est surjective.

3. Une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un intervalle est une fonction constante donc :

   • $Ker(f) = \{P \in \mathbb{R}[x] \quad | \quad P' = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[x] \quad | \quad P = cste\} = Vect(1) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ donc f n'est pas injective.

   • Comme f est un endomorphisme f n'est ni injective ni surjective.

   On peut le voir autrement car $Im(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), f(x^2), .., f(x^n)) = \text{Vect}(0, 1, 2x, 3x^2, ..., nx^{n-1}) = \text{Vect}(1, x, x^2, ..., x^n$ $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Donc on voit bien que f n'est pas surjective puisque $\mathbb{R}_{n-1}[x] \neq \mathbb{R}_n[x]$.

Endomorphisme associé à une matrice

Exercice 4 :Rang matriciel, noyau, image

a) $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ donc $\underline{A \text{ n'est pas inversible}}$.

   D'après le théorème du rang $3 = dim(Ker(A)) + rg(A)$ donc $dim(Ker(A)) = 2$.

   De plus si on note (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ alors on a :

   • $C_2 = 0$ et $C_2 = AE_2$ donc $AE_2 = 0$ donc $E_2 \in Ker(A)$.

   • $C_1 = C_3$ donc $C_1 - C_3 = 0$ et de plus $C_1 = AE_1$ et $C_3 = 1E_3$, donc $A(E_1 - E_3) = 0$ et donc $E_1 - E_3 \in Ker(A)$.

   $Ker(A)$ est de dimension et contient deux vecteurs $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_1 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ non colinéaires.

   <u>Ccl :</u> $\boxed{Ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$.

   Déterminer en un coup d'oeil, le rang, le noyau et l'image de la matrice dans chacun des cas suivants. Dire également si la matrice est inversible.

b) $rg(B) = rg(E_3, E_2, E_1) = 3$ car la famille (E_3, E_2, E_1) est une base (donc libre).

   Ainsi B est inversible et $\boxed{Ker(B) = \{0\}}$

c) $rg(C) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \\ 3 & 2 \\ 5 & \end{pmatrix} = 2$ car in a remarqué que $L_1 = L_3$ et que L_1 et L_2 sont non-colinéaires.

   Donc $\underline{C \text{ n'est pas inversible.}}$

   D'après le thm du rang on a donc $dim(Ker(C)) = 1$.

   En remarquant que $C_1 = C_3 - C_2$ on en déduit que $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ et donc que $A(E_1 + E_2 - E_3) = 0$ puis que $E_1 + E_2 - E_3(C)$.

   $Ker(C)$ est de dimension 1 et contient le vecteur non nul $E_1 + E_2 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ccl : $\boxed{Ker(C) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$.

Exercice 5 :Sur le noyau matriciel
On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. A est inversible car $rg(A) = rg(e_2, e_3, e_4, e_1) = 4$ où (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Par calculs matriciels on a bien $A^4 = I_4$. On en déduit que $AA^3 = I_4$ et donc que $A^{-1} = A^3$.
3. • $E_{-1} = Ker(A + I_4)$
   On a
   $$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors :
   $$\begin{aligned} X \in Ker(A + I_4) &\iff (A + I_4)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + t &= 0 \\ x + y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ z + t &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -t \\ y &= -x \\ y &= -z \\ z &= -t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -t \\ y &= t \\ z &= -t \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Ainsi
   $$E_{-1}(A) = Ker(A + I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

• $E_1 = Ker(A - I_4)$

On a

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors :

$$\begin{aligned} X \in Ker(A - I_4) &\iff (A - I_4)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x + t & = 0 \\ x - y & = 0 \\ y - z & = 0 \\ z - t & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = t \\ y & = x \\ y & = z \\ z & = t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = t \\ y & = t \\ z & = t \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$E_1(A) = Ker(A - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 6 :Type concours

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. • Déterminons $Ker(A)$: en remarquant que $C_1 = C_2$ on en déduit que $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$ car les deux vecteurs sont non-colinéaires.

   D'après le théorème du rang matriciel on en déduit donc que $dim(Ker(A)) = 1$.

   Par ailleurs l'égalité $C_1 = C_2$ entraine $AE_1 = AE_2$ où (E_1, E_2, E_3) désigne la base canonique que $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   Il s'ensuit donc que $A(E_1 - E_2) = 0$ puis que $E_1 - E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(A)$.

Ccl : $Ker(A)$ est de dimension et si on pose $\boxed{U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ on a $U \in Ker(A)$ donc $Ker(A) = Vect(U)$.

• Posons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AV = -V \iff (A+I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \\ -2x-2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ y &= z \\ x+y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= z \\ x &= -z \end{cases}$$

Ainsi $AV = -V \iff V$ est de la forme $V = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Ccl : $\boxed{V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ convient.

• On a

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors :

$$\begin{aligned} X \in Ker(A-I_3) &\iff (A-I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x+t &= 0 \\ x-y &= 0 \\ y-z &= 0 \\ z-t &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y+z &= 0 \\ -y-z &= 0 \\ -2x-2y-2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= -z \\ x &= 0 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$Ker(A-I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ccl : $\boxed{W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ convient.

2. Vérifions que (U,V,W) forme une base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} Vect(U,V,W) &= Vect(U+V,V,W) \\ &= Vect(E_3,V,W) \quad U+V=E_3 \\ &= Vect(E_3,V,W+E_3) \\ &= Vect(E_3,V,E_2) \quad W+E_3=E_2 \\ &= Vect(E_3,E_2+E_3-V,E_2) \\ &= Vect(E_3,E_1,E_2) \quad E_2+E_3-V=E_1 \\ &= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille (U,V,W) génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De plus nous sommes en présence d'une famille de 3 vecteurs en dimension 3.

<u>Ccl :</u> (U,V,W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. Montrons que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculons P^{-1} :

On cherche à résoudre l'équation $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$PX = Y \iff \begin{cases} x-y &= a \\ -x+y+z &= b \\ y-z &= c \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y+z &= b \\ x-y &= a \\ y-z &= c \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y+z &= b \\ z &= a+b \\ y &= a+b+c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 2a+b+c \\ y &= a+b+c \\ z &= a+b \end{cases} \iff \quad \iff X = P^{-1}Y$$

avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Par calculs matriciel on trouve $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Par calculs matriciels $BU = U, BV = 0$ et $BW = -W$.

   Logiquement on devrait avoir $P^{-1}BP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ce que l'on peut vérifier par calculs matriciels.

Matrices d'applications linéaires

Exercice 7 :Matrice d'une application linéaire

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (4x-y, x+2y, 3y)$.

$$Mat_{B_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :Matrice d'une application linéaire bis
Soit E un espace vectoriel de dimension 4, de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} f(e_1) &=& 2e_1 - 3e_2 + e_3 + 4e_4 \\ f(e_2) &=& e_1 + 2e_3 - 3e_4 \\ f(e_3) &=& -2e_2 + 5e_3 + 2e_4 \\ f(e_4) &=& 6e_1 - 4e_2 + 2e_3 + 7e_4 \end{cases}$.

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & --3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 :Détermination de l'image à l'aide d'une matrice
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Par lecture matricielle : $\begin{cases} f(1) & = 1 + 2x - x^2 \\ f(x) & = -2 + 2x^2 \\ f(x^2) & = 4 + 3x \end{cases}$ et par propriété $Imf(f) = Vect\big(f(1), f(x), f(x^2)\big)$.

   Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} Imf(f) &=& Vect\big(f(1), f(x), f(x^2)\big) \\ &=& Vect\big(1 + 2x - x^2, -2 + 2x^2, 4 + 3x\big) \\ &=& Vect\big(1 + 2x - x^2, 1 + x^2, 4 + 3x\big) \\ &=& Vect\big(2 + 2x, 1 + x^2, 4 + 3x\big) \\ &=& Vect\big(1 + x, 1 + x^2, 4 + 3x\big) \\ &=& Vect\big(1 + x, 1 + x^2, 1\big) \\ &=& Vect(1, x, x^2) \end{array}$$

   Ccl : $\boxed{Im(f) = \mathbb{R}_2[x]}$.

2. Pour déterminer l'image de $p : x \mapsto x^2 + x - 1$ on considère $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vecteur coordonnées dans la base $(1, x, x^2)$.

   On effectue le produit matriciel $AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. D'après le cours ce vecteur est le vecteur coordonnées de $f(p)$ dans la base $(1, x, x^2)$.
   Ccl : $\boxed{f(p) : x \mapsto 1 + x + 3x^2}$.

Exercice 10 :Détermination du noyau à l'aide d'une matrice Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques vaut $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour déterminer une base de Ker f déterminons dans un premier temps une base de $Ker(A)$:

$$\begin{array}{rcl}
Ker(A) & = & \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad AX = 0\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{array}{rl} 2x+y+z & = 0 \\ x+z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ x+z & = 0 \end{array} \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{array}{rl} x & = -z \\ y & = z \end{array} \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \quad | \quad z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{array}$$

Remarquons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ donc $Ker(f)$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$ donc ce résultat ne peut pas être une réponse au noyau de f.
Ccl : $\boxed{Ker(f) = Vect\big((-1,1,1)\big)}$.

Exercice 11 :Extrait de concours Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. La famille $(f(e_3), f(e_4))$ est libre car les leurs coordonnées dans la base canonique sont les colonnes C_3 et C_4 de A qui sont clairement non colinéaires.

2. On vérifie aisément au niveau des colonnes de A que $C_1 = C_3 + C_4$ ce qui se traduit par le fait que $f(e_1) = f(e_3) + f(e_4)$.

3. On sait que Im $f = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\big)$ donc d'après la quesion précédente et nen utilisant le fait que $f(e_2) = 0$ (lecture matricielle) :

$$\begin{array}{rcl}
Im(f) & = & Vect\big(f(e_3) + f(e_4), 0, f(e_3), f(e_4)\big) \\
& = & Vect\big(f(e_3), f(e_4)\big)
\end{array}$$

   Or $(f(e_3), f(e_4))$ est libre d'après la question 1. Donc $(f(e_3), f(e_4))$ est une base de $Im(f)$.

   On en déduit que $\boxed{rg(f) = dim(Im(f)) = 2}$ puis par le théorème du rang que $dim(\mathbb{R}^4) = dim(Ker(f)) + rg(f)$ et donc que $\boxed{dim(Ker(f)) = 2}$

4. Par lecture matricielle on a $f(e_2) = 0$ donc $e_2 \in Ker(f)$.

   De même $e_1 - e_3 - e_4 \in Ker(f)$ car $f(e_1 - e_3 - e_4) = f(e_1) - f(e_3) - f(e_4) = 0$ par linéarité de f et d'après la relation $f(e_1) = f'e_3) + f(e_4)$ établie à la question 2.

   Par conséquent, la famille $(e_2, e_1 - e_3 - e_4)$ est une famille libre (car les vecteurs sont non colinéaires) de $Ker(f)$ qui est un espace de dimension 2 d'après la question 3.

   Il s'ensuit que $(e_2, e_1 - e_3 - e_4)$ forme une base de $Ker(f)$.

5. La matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A^2.

Exercice 12 :Plus difficile
Soit E, un espace vectoriel de dimension 4 et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ une base de E.
Soit f, un endomorphisme de E vérifiant :

- $f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$
- $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
- $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_4$
- $f(\vec{e}_4) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$

1. On peut effectuer les calculs par linéarité de f ou bien utiliser la matrice A de f dans la base donnée.
   D'après les hypothèses faites sur f on obtient :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   La matrice représentant l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ dans la base donnée est la matrice A^2.
   Par calculs matriciels on trouve : $A^2 = 0_4$.
   Il s'ensuit que $f f$ est l'endomorphisme nul et donc que l'on a bien que pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$: $f \circ f(\vec{e}_k) = \vec{0}$.
2. Cela répond également à la question 2.