FEUILLE D'EXERCICES

# CONVERGENCE ET APPROXIMATION

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**EXERCICE 11.1. Application directe**
Soit $X$, une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ : $P(|X-1| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$
2. En déduire que $P(X \geqslant 3) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. Confirmer l'inégalité précédente en utilisant la fonction de répartition de $X$ (on donne $e^{-3} \approx 0,05$).

**EXERCICE 11.2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et intervalle de confiance**
Soit $\theta \in \left([0;\frac{1}{2}\right]$.
On suppose que les variables $(Y_n)_n$ sont i.i.d d'espérance $\theta$ et de variance $\theta^2$.
On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Montrer que l'on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $T_n$.
2. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\big(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\big) \geqslant 1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour $\theta$ au niveau de confiance 90% lorsqu'on choisit $n = 100$.

**EXERCICE 11.3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et intervalle de confiance**
Soit une variable aléatoire $X$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$. On considère un échantillon de $n$ variables aléatoires suivant la loi de $X$.
Déterminer une taille $n$ de l'échantillon telle que l'intervalle $[\overline{X_n} - 0,1, \overline{X_n} + 0,1]$ soit un intervalle de confiance de $p$ au niveau de confiance $0,95$.

**EXERCICE 11.4. Loi faible des grands nombres**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p$.
On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Déterminer la loi de $Y_n$.
2. En déduire l'espérance et la variance de $Z_n$.
3. Démontrer que :
$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\longrightarrow+\infty} P(|Z_n - 2p| > \varepsilon) = 0.$$

## Convergence en loi

### EXERCICE 11.5. Convergence en loi de lois de Bernoulli

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable $X$ suivant une loi $\mathscr{B}(e^{-1})$.

### EXERCICE 11.6. Convergence en loi de lois uniformes

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0;1-\frac{1}{n}]\right)$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable $X$ suivant une loi $\mathscr{U}([0;1])$.

### EXERCICE 11.7. Convergence en loi de tirages avec un grand nombre de boules

On considère une urne constituée de $2n$ boules ($n \geqslant 2$) dont la moitié sont noires et l'autre moitié sont blanches. On pioche dans cette urne deux boules successivement et sans remise, et on note $X_n$ le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de $X_n$ ?
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable $Z$ suivant la loi $\mathscr{B}\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Interpréter le résultat.

### EXERCICE 11.8. Convergence en loi vers une loi exponentielle

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ et $(X_1,\dots,X_n)$ un $n$-échantillon de $X$.
On considère les variables aléatoires

$$M_n = \max(X_1,\dots,X_n) \text{ et } Y_n = n(1-M_n).$$

On admet que $M_n$ et $Y_n$ sont des variables à densité.

1. Déterminer la fonction de répartition de $M_n$ puis celle de $Y_n$.
2. Montrer que la suite $(Y_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire usuelle.

### EXERCICE 11.9. Convergence en loi de lois normales

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Exprimer, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $F_{X_n}(t)$ en fonction de $\Phi$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable $Z$ dont on donnera la loi.
3. Interpréter le résultat.

### EXERCICE 11.10. Convergence de lois binomiales vers une loi de Poisson

On suppose $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\dfrac{\lambda}{n}\right)$.
On se propose de montrer que la suite $(X_n)$ converge en loi vers $Z$ avec $Z\hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
On admettra le résultat suivant : $\forall k\in\mathbb{N},\quad \dbinom{n}{k} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall k\in[\![0,n]\!],\quad P(X_n=k) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda^k}{k!}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$ (ultra-classique !).
3. Conclure.

**EXERCICE 11.11. Extrait de concours : convergence vers la loi de Grumbel**
On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité $f$, où $f$ est définie , pour tout $t$ de $\mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $\quad T_n = \max(X_1,\dots,X_n) \quad$ et $\quad U_n = T_n - \ln(n)$.

1. (a) Déterminer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de $T_n$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leqslant x) = \left(1+\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

2. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

## Application du théorème limite central

**EXERCICE 11.12.** Soit $(X_n)_n$ une suite variables indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0;1[$.

1. A l'aide de l'inégalité de B-T (re-)démontrer que $\left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{5}{n}}, \overline{X_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de $p$ au niveau de confiance $0,95$.

2. A l'aide du théorème limite central montrer que $\left[\overline{X_n} - \dfrac{1,96}{\sqrt{2n}}, \overline{X_n} + \dfrac{1,96}{\sqrt{2n}}\right]$ est un intervalle de confiance de $p$ au niveau de confiance $0,95$.