

ESPACES VECTORIELS

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

EXERCICE 2.1 (Combinaisons linéaires).

1. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
2. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + x^2 - 2x$ est-elle une combinaison linéaire des fonctions polynomiales $(x^2(x-1), x(x-1)^2)$?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.2 (Sous-espaces vectoriels par argument de stabilité).

Montrer, dans chaque cas, que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant un argument de stabilité :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.
3. $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M \text{ est symétrique}\}$ (Rappel : $M \text{ est symétrique} \iff {}^t M = M$)
4. $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(1) = 0\}$
5. $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], \forall x \in \mathbb{R}, xP(x) - 2xP'(x) = 0\}$

EXERCICE 2.3 (Sous-espaces vectoriels engendrés et famille génératrice).

Montrer, dans chaque cas, que F est un sous-espace vectoriel de E en déterminant une famille génératrice :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x - y, x + y, 2x - 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$
3. $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a - b + 2c & a + c \\ a - b & b + 3c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
4. $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(0) = P(1) = 0\}$
5. $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x], P(x+1) - P(x-1) = 0\}$
6. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$
7. $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire supérieure}\}$

EXERCICE 2.4 (Sous-espace vectoriel engendré).

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère la partie F définie par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $F = \text{Vect}(I, J, K)$.
2. Montrer que K n'est pas combinaison linéaire de I et J .
3. (I, J) est-elle une famille génératrice de F ?

Familles libres, bases**EXERCICE 2.5 (Familles libres - familles liées).**

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((4, -16, 10); (4, -5, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
2. $((-1, 0, 1); (1, -1, 1); (0, 1, 2))$ dans \mathbb{R}^3 .
3. $((1, 1, 1, 1); (1, 2, 3, 4); (0, 2, 8, 16))$ dans \mathbb{R}^4 .
4. $((2, 2, 2); (1, 1, 0); (1, 1, 1))$ dans \mathbb{R}^3 .
5. $((1, 0, -1); (-1, 2, 1); (3, -4, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
6. $(x^2, x^2 + x + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.
7. $(x^3, x^2 - x, x^2 + x)$ dans $\mathbb{R}_3[x]$.
8. $(x^2, x(x-2), (x-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.
9. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
10. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.6 (Famille libre - abstrait).

E est un espace vectoriel et (u, v, w) est une famille libre de E .

On pose $u' = v + w$, $v' = u + w$ et $w' = u + v$: montrer que la famille (u', v', w') est libre.

EXERCICE 2.7 (Base et dimension).

On définit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 . En déterminer une base et la dimension.
2. Déterminer une base \mathcal{B} de $F \cap G$.

EXERCICE 2.8 (Plusieurs bases).

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En donner une base \mathcal{B} et préciser sa dimension.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1, 2, 1); (1, 1, 0))$ est aussi une base de F .
3. Montrer que $u = (-1, 1, 2)$ appartient à F et déterminer ses coordonnées dans chacune des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

EXERCICE 2.9 (Cas de n vecteurs en dimension n - coordonnées dans une base).

1. Montrer que la famille $((1, 1, 1, 1); (1, -1, 1, -1); (1, 1, -1, -1); (1, -1, -1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^4 puis déterminer les coordonnées de $(2, 0, 2, 0)$ dans cette base.

- Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.
- Montrer que la famille $(x^2, x(x-1), (x-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ puis déterminer les coordonnées de la fonction polynomiale $P: x \mapsto x$ dans cette base.

Rang

EXERCICE 2.10 (Rang matriciel - rang d'une famille de vecteur).

- Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis en déduire le rang de la famille $((1, 1), (0, 1), (-1, 2))$ dans \mathbb{R}^2 .

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est inversible par un calcul de rang.
- En déduire que la famille $((-x^3 + 2, x, x^2, 2x^3 - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercices plus difficiles

EXERCICE 2.11. Espace des matrices symétriques et anti-symétriques

On rappelle qu'on dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est symétrique si ${}^t M = M$ et anti-symétrique si ${}^t M = -M$.

On note $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille 3 et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques réelles de taille 3.

- Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
 - Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
- Reprendre les mêmes question avec $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- Pouvez-vous généraliser et donner sans justifications les dimensions $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

EXERCICE 2.12 (Familles avec paramètre).

- Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que la famille $((1, 0, a), (1, 1, a), (a, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer les valeurs de $\mu \in \mathbb{R}$ telles que la famille $(t\mu, 1 + x - \mu x^2, 2\mu + x - x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 2.13. Travail dans $\mathbb{R}_n[x]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère le polynôme P_k défini par $P_k(x) = x^k + x^{k+1}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille (P_0, \dots, P_n) est libre.
- La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_4[x]$?
- Compléter la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) (c'est-à-dire ajouter un ou plusieurs vecteurs) de sorte qu'elle forme une base de $\mathbb{R}_4[x]$.

EXERCICE 2.14. Type concours

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère l'ensemble suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}.$$

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F .
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G .

$$3. \text{ Soit } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
- (b) La matrice A est-elle inversible ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F .
6. (a) Déterminer deux réels α et β tels que : $M = \alpha A + \beta B$.
(b) Calculer AB et BA .
(c) Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.
7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
(b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n , on a : $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$.

Partie III

$$\text{Soient } T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y$.

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B .
9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L , que l'on déterminera, telle que : $L = TL + Y$.
11. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n - L = T^n(X_0 - L)$.
12. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n .