

CORRECTION

EXERCICE 2.1 (Combinaisons linéaires).

1.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 2 \\ -\lambda_3 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}$$

Ccl: $\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

2.

$$x^3 + x^2 - 2x = \lambda_1 x^2(x-1) + \lambda_2 x(x-1)^2 \iff x^3 + x^2 - 2x = (\lambda_1 + \lambda_2)x^3 + (-\lambda_1 - 2\lambda_2)x^2 + \lambda_2 x$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Ccl: $\boxed{x^3 + x^2 - 2x = 3x^2(x-1) - 2x(x-1)^2}$

3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ 3\lambda_1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 = 6 \\ 2\lambda_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Or si $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ alors $2\lambda_1 + \lambda_2 \neq 3$. Le système comporte une incompatibilité, il n'a donc pas de solution.

Ccl: $\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ n'est pas combinaison linéaire des matrices } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

EXERCICE 2.2 (Sous-espaces vectoriels par argument de stabilité).

1. Corrigé en classe.

2. Montrons que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

• $F \subset \mathbb{R}^4$ par définition.

• $\vec{0}_{\mathbb{R}^4} \in F$ (évident)

• Montrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soient $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et montrons que $\lambda u + \mu v \in F$.

On pose $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$.

$$\lambda u + \mu v = \underbrace{(\lambda x + \mu x')}_{=X}, \underbrace{(\lambda y + \mu y')}_{=Y}, \underbrace{(\lambda z + \mu z')}_{=Z}, \underbrace{(\lambda t + \mu t')}_{=T}.$$

Vérifions que les coordonnées (X, Y, Z, T) du vecteur $\lambda u + \mu v$ satisfont les équations de F :

$$\begin{aligned} X + Y + Z + T &= \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z' + \lambda t + \mu t' \\ &= \lambda \underbrace{(x + y + z + t)}_{=0} + \mu \underbrace{(x' + y' + z' + t')}_{=0} \quad \text{car } (u, v) \in F^2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} X - Y + Z - T &= \lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y') + \lambda z + \mu z' - (\lambda t + \mu t') \\ &= \lambda \underbrace{(x - y + z - t)}_{=0} + \mu \underbrace{(x' - y' + z' - t')}_{=0} \quad \text{car } (u, v) \in F^2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent on a bien montré que $\lambda u + \mu v \in F$ et donc que F est stable par combinaisons linéaires.

Ccl : F est un sev de \mathbb{R}^4 .

3. Montrons que $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M \text{ est symétrique}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Rappel : M est symétrique $\iff {}^t M = M$

• $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.

• $0_3 \in F$ (évident)

• Montrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soient $(M, N) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et montrons que $\lambda M + \mu N \in F \iff {}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N$.

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda M + \mu N) &= \lambda \underbrace{{}^t M}_{=M} + \mu \underbrace{{}^t N}_{=N} \quad \text{car } (M, N) \in F^2 \text{ donc } {}^t M = M \text{ et } {}^t N = N \\ &= \lambda M + \mu N \end{aligned}$$

Donc F est stable par combinaisons linéaires.

Ccl : F est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(1) = 0\}$

• $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.

• $0_{\mathbb{R}_3[x]} \in F$ (évident)

• Montrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soient $(P, Q) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et montrons que $\lambda P + \mu Q \in F \iff (\lambda P + \mu Q)(1) = 0$.

Or par définition des opérations d'addition interne et de multiplication externe dans $\mathbb{R}_3[x]$:

$$\begin{aligned}
 (\lambda P + \mu Q)(1) &= \underbrace{\lambda P(1)}_{=0} + \underbrace{\mu Q(1)}_{=0} && \text{car } (P, Q) \in F^2 \text{ donc } P(1) = Q(1) = 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc F est stable par combinaisons linéaires.

Ccl: F est un sev de $\mathbb{R}_3[x]$.

5. Corrigé en cours.

EXERCICE 2.3 (Sous-espaces vectoriels engendrés et famille génératrice).

1. $F = \{(x - y, x + y, 2x - 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 2), (-1, 1 - 3))$

Ccl: F est un sev de \mathbb{R}^3 et $((1, 1, 2), (-1, 1 - 3))$ est une famille génératrice de F .

2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\} = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.

Ccl: F est un sev de \mathbb{R}^4 et $((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ est une famille génératrice de F .

3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a - b + 2c & a + c \\ a - b & b + 3c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$.

Ccl: F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F .

4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(0) = P(1) = 0\}$

On pose $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ a = -b - c \end{cases}$$

Par conséquent P est de la forme :

$$P(x) = (b - c)x^3 + bx^2 + cx.$$

P étant arbitraire, on a montré que

$$F = \{x \mapsto (b - c)x^3 + bx^2 + cx \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \iff \boxed{F = \text{Vect}(x^3 + x^2, -x^3 + x)}.$$

Ccl: F est un sev de $\mathbb{R}_3[x]$ et $(x^3 + x^2, -x^3 + x)$ est une famille génératrice de F .

5. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x], P(x + 1) - P(x - 1) = 0\}$

En posant $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il vient :

$$\begin{aligned}
 P(x + 1) - P(x - 1) &= a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - (a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c) \\
 &= 4ax + b
 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$P \in F \iff \begin{cases} 4a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Par conséquent P est de la forme $P(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et donc on a montré que

$$F = \{x \mapsto ccx \mid c \in \mathbb{R}\} \iff \boxed{F = \text{Vect}(x \mapsto 1)}.$$

Ccl: F est un sev de $\mathbb{R}_2[x]$ et $(x \mapsto 1)$ est une famille génératrice de F .

6.

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a + d = 0 \right\} \\
 &= \left\{ M = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} / (b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 &= \left\{ d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Ccl : F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F .

7.

$$\begin{aligned}
 F &= \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M \text{ est triangulaire supérieure} \} \\
 &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} / (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\
 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Ccl : F est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F .

EXERCICE 2.4 (Sous-espace vectoriel engendré).

1.

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 &= \text{Vect}(I, J, K)
 \end{aligned}$$

2. Supposons que K soit combinaison linéaire de (I, J) . On a alors des réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$K = \lambda I + \mu J \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & \lambda \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}.$$

On obtient donc $K = 0_3$ ce qui est absurde !

Ccl : K n'est pas combinaison linéaire de (I, J) .

3. Supposons que la famille (I, J) est génératrice de F , c'est à dire que $F = \text{Vect}(I, J)$. On a $K \in \text{Vect}(I, J) = F$ donc K est combinaison linéaire de (I, J) ce qui est impossible d'après la question précédente.

Ccl : (I, J) n'est pas génératrice de F .

EXERCICE 2.5 (Familles libres - familles liées).

1. Les deux vecteurs $((4, -16, 10); (4, -5, 3))$ sont non-colinéaires, donc la famille est libre.
2. Montrons que $(\underbrace{(-1, 0, 1)}_{=u_1}; \underbrace{(1, -1, 1)}_{=u_2}; \underbrace{(0, 1, 2)}_{=u_3})$ est une famille libre :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

On obtient alors le système linéaire homogène :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 4\lambda_3 = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 + 2L_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Ccl : La famille $(\underbrace{(-1, 0, 1)}_{=u_1}; \underbrace{(1, -1, 1)}_{=u_2}; \underbrace{(0, 1, 2)}_{=u_3})$ est libre.

3. Même rédaction.

Le système que l'on obtient est :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 16\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2 \\ \lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 & L_4 \leftrightarrow L_4 - L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 & L_4 \leftrightarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ccl : La famille $((1, 1, 1, 1)); (1, 2, 3, 4); (0, 2, 8, 16)$ est libre.

4. Corrigé en classe.
5. Corrigé en classe.
6. Corrigé en classe.
7. Montrons que $(x^3, x^2 - x, x^2 + x)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[x]$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 x^3 + \lambda_2 (x^2 - x) + \lambda_3 (x^2 + x) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 x^3 + (\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (-\lambda_2 + \lambda_3)x = 0.$$

Par identification avec la fonction polynomiale nulle on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

Ccl : La famille $(x^3, x^2 - x, x^2 + x)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[x]$.

8. Même démarche.

Le système que l'on obtient est

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ccl : La famille $(x^2, x(x-2), (x-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.

9. Les matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ sont clairement colinéaires.

Ccl : La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

10. Montrons que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Supposons que l'on ait $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 0_2 \iff \begin{pmatrix} a+b+3c & -2b+6c \\ 0 & a+b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+3c = 0 \\ -2b+6c = 0 \\ a+b-3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+3c = 0 \\ -2b+6c = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Ccl : La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

EXERCICE 2.6 (Famille libre - abstrait). Supposons que l'on ait $au' + bv' + cw' = 0_E$ pour des réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Et montrons que $a = b = c = 0$.

On a :

$$au' + bv' + cw = 0_E \iff a(v+w) + b(u+w) + c(u+v) \iff (b+c)u + (a+c)v + (a+b)w = 0_E.$$

Or (u, v, w) est une famille libre donc :

$$(b+c)u + (a+c)v + (a+b)w = 0_E \Rightarrow \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a = 0 & L_1 - L_2 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a = 0 \\ a+c = 0 \\ 2b = 0 & L_1 + L_3 \end{cases}.$$

$$\text{Et donc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Ccl : Donc la famille (u', v', w') est libre.

EXERCICE 2.7 (Base et dimension).

Corrigé en classe.

EXERCICE 2.8 (Plusieurs bases).Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

1. On montre sans difficulté que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. Les vecteurs u_1 et u_2 sont clairement non colinéaires, donc la famille (u_1, u_2) est libre et génératrice de F , et forme donc une base de F . $\boxed{\dim(F) = 2}$.
2. Remarquons tout d'abord que les vecteurs $v_1 = (1, 2, 1)$ et $v_2 = (1, 1, 0)$ sont bien dans F (puisque leurs coordonnées vérifient l'équation de définition de F).

Donc $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une famille constituée de **2 vecteurs en dimension 2** puisque $\dim(F) = 2$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de F . Or v_1 et v_2 sont clairement non colinéaires. $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } F}$.

3. $u = (-1, 1, 2)$ est clairement dans F puisque ses coordonnées vérifient l'équation de définition.

• on remarque que $u = u_1 + 2u_2$ donc le vecteurs coordonnées de u dans la base \mathcal{B} est $U_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

• on remarque que $u = 2v_1 - 3v_2$ donc le vecteurs coordonnées de u dans la base \mathcal{B}' est $U_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.9 (Cas de n vecteurs en dimension n - coordonnées dans une base).

1. Notons $\mathcal{B} = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$ la famille $((1, 1, 1, 1); (1, -1, 1, -1); (1, 1, -1, -1); (1, -1, -1, 1))$.

Remarquons que la famille \mathcal{B} est constituée de 4 vecteurs de \mathbb{R}^4 qui est de dimension 4.

Montrons que \mathcal{B} est libre :

Supposons que pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ l'on ait :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors on a le système sytème linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ a-b+c-d = 0 \\ a+b-c-d = 0 \\ a-b-c+d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ 2a+2c = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2a+2b = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ 2a+2d = 0 & L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ c = -a \\ b = -a \\ d = -a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2a = 0 \\ c = -a \\ b = -a \\ d = -a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

La famille \mathcal{B} est donc libre.

Ccl : La famille \mathcal{B} étant une famille libre de 4 vecteurs de \mathbb{R}^4 , on en déduit directement que \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^4 .

Déterminons les coordonnées de $u = (2, 0, 2, 0)$ dans cette base :

On remarque immédiatement que $u = u_1 + u_2$.

Ccl : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur coordonnées de u dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

2. Corrigé en classe.

3. Notons $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la famille $(x^2, x(x-1), (x-1)^2)$ et remarquons qu'elle est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est de dimension 3.

Montrons que la famille est génératrice :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(x^2, x(x-1), (x-1)^2) &= \text{Vect}(x^2, x^2 - x, x^2 - 2x + 1) \\ &= \text{Vect}(x^2, x, 2x + 1) \\ &= \text{Vect}(x^2, x, 1) \\ &= \mathbb{R}_2[x]. \end{aligned}$$

Ccl : La famille \mathcal{B} est une famille génératrice 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[x]$, donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Déterminons les coordonnées de la fonction polynomiale $P : x \mapsto x$ dans cette base :

On remarque immédiatement que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P_1(x) - P_2(x)$.

Ccl : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur coordonnées de P dans la base $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$.

Rang

EXERCICE 2.10 (Rang matriciel - rang d'une famille de vecteurs).

1.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}({}^t A) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2 \quad \text{car les colonnes sont clairement non colinéaires} \end{aligned}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Par pivot :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) \quad L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \\ &= 4 \quad \text{car les vecteurs colonnes forment clairement une famille libre.} \end{aligned}$$

On a $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $\text{rg}(A) = 4$ donc A est une matrice inversible.

(b) On constate très clairement que la matrice A est la matrice des vecteurs (colonnes) coordonnées des vecteurs $(-x^3 + 2, x, x^3, 2x^3 - 1)$ dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$.

D'après la question précédente, A étant inversible, on a $\text{rg}(-x^3 + 2, x, x^3, 2x^3 - 1) = 4$.

Par conséquent, la famille $(-x^3 + 2, x, x^3, 2x^3 - 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$, tel que $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$, constituée donc de **4 vecteurs en dimension 4**.

Conclusion : la famille $(-x^3 + 2, x, x^3, 2x^3 - 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

EXERCICE 2.11 (Espace des matrices symétriques et anti-symétriques).

Corrigé en classe.

EXERCICE 2.12 (Famille libre avec paramètre).

1. Travaillons avec la matrice A_a des vecteurs coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^3 : $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$.

La famille $((1, 0, a), (1, 1, a), (a, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si la matrice A_a est inversible (de rang 3).

Or

$$\begin{aligned} \text{rg}(A_a) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 - aL_1} \end{aligned}$$

La matrice est triangulaire inférieure donc par conséquent $\text{rg}(A_a) = 3 \iff 1 - a^2 \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Conclusion : $\boxed{((1, 0, a), (1, 1, a), (a, 0, 1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}}$.

2. Travaillons avec la matrice A_μ des vecteurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: $A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 2\mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\mu & -1 \end{pmatrix}$.

La famille $(\mu, 1 + x - \mu x^2, 2\mu + x - x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ si et seulement si la matrice A_μ est inversible (de rang 3).

Or

$$\begin{aligned} \text{rg}(A_\mu) &= \text{rg} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 2\mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\mu & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 2\mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 \end{pmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 + \mu L_2} \end{aligned}$$

La matrice est triangulaire inférieure donc par conséquent $\text{rg}(A_\mu) = 3 \iff \mu \neq 0$ et $\mu \neq 1$.

Conclusion : $\boxed{(\mu, 1 + x - \mu x^2, 2\mu + x - x^2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x] \iff \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}}$.

EXERCICE 2.13 (Type concours).

Voir correction du DM3.