FEUILLE D'EXERCICES

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

EXERCICE 12.1. Continuité
Montrer dans chaque cas que la fonction f est continue sur l'ensemble donné ($\mathbb{R}^2$ par défaut).

1. $f(x,y) = x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1$
2. $f(x,y) = e^x + x$
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x+y}$ ($\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$)
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2y + y^2x}{e^x + 1}$
5. $f(x,y) = \ln(x)e^y$ ($]0;+\infty[\times\mathbb{R}$)
6. $f(x,y) = \sqrt{e^x + e^y}$
7. $f(x,y) = \dfrac{2y}{y^2+1}$
8. $f(x,y) = x^y$
9. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

EXERCICE 12.2. Dérivées partielles
Déterminer dans chaque cas les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f, puis exprimer le vecteur gradient et la matrice hessienne aux points où toutes ces quantités existent.

1. $f(x,y) = \sqrt{1+x+y}$
2. $f(x,y) = e^x + x$
3. $f(x,y) = \dfrac{2y}{y^2+1}$
4. $f(x,y) = x^y$
5. $f(x,y) = x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4$
6. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$
7. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+1}$

EXERCICE 12.3. Existence d'extremum
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 1 + \ln(x+y)$

1. Représenter de domaine de définition D de f. On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer sur D les dérivées partielles premières de f.
3. f admet-elle un extremum sur D ?

EXERCICE 12.4. Nature des points critiques
Soit f la fonction définie sur par $f(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$

1. Montrer que $(4,2)$ et $(2,3)$ sont des points critiques de f.
2. f possède t-elle un extremum local en $(4,2)$? en $(2,3)$?

Type concours

EXERCICE 12.5 (EML 2016)**.**
On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0;+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, définie, pour tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$.
7. (a) Soit $(x, y) \in]0;+\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1.$$

   (b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e)?

EXERCICE 12.6. EML 2017
On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2{,}7 < \mathrm{e} < 2{,}8 \qquad 7{,}3 < \mathrm{e}^2 < 7{,}4 \qquad 0{,}6 < \ln(2) < 0{,}7$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1;+\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie pour tout (x, y) de $]1;+\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - xy$$

5. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α, α), le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.

6. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α).

   (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α)? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local?