

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

CORRECTION

Exercice 1 : Continuité

1. $f(x, y) = x^4 y^2 + 3x^2 y - 2x + 1$: f est polynomiale donc continue sur \mathbb{R}^2 .
2. $f(x, y) = e^x + x = (\varphi \circ p_1)(x, y)$ avec $\varphi : z \mapsto e^z + z$ qui est continue sur \mathbb{R} par thm généraux. Donc f est continue sur \mathbb{R}^2 par composition.
3. $f(x, y) = \sqrt{1+x+y} = (\varphi \circ g)(x, y)$ avec $\varphi = z \mapsto \sqrt{z}$ continue sur \mathbb{R}_+ et $g : (x, y) \mapsto 1+x+y$ continue sur \mathbb{R}^2 . Donc f est continue sur $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ par composition.
4. $f(x, y) = \frac{x^2 y + y^2 x}{e^x + 1} = \frac{f_1(x, y)}{(\varphi \circ p_1)(x, y)}$ avec $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 y + y^2 x$ polynomiale donc continue sur \mathbb{R}^2 et $\varphi : z \mapsto e^z + 1 \neq 0$ continue sur \mathbb{R} par thm généraux. Donc $\varphi \circ p_1$ est continue sur \mathbb{R}^2 et par quotient f est continue sur \mathbb{R}^2 .
5. $f(x, y) = \ln(x)e^y = (\ln \circ p_1)(x, y) \times (\exp \circ p_2)(x, y)$. Or $\ln \circ p_1$ est continue sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ par composition et $\exp \circ p_2$ est continue sur \mathbb{R}^2 par composition. Ainsi f est continue sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ par produit de fonctions continues.
6. $f(x, y) = \sqrt{e^x + e^y} = \sqrt{(\exp \circ p_1)(x, y) + (\exp \circ p_2)(x, y)}$. Même démarche.
7. $f(x, y) = \frac{2y}{y^2 + 1}$ est continue sur \mathbb{R}^2 (car $y^2 + 1 \neq 0$) comme quotient de fonctions polynomiales.
8. $f(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)} = e^{p_2(x, y) \times (\ln \circ p_1(x))}$: Même démarche.
9. $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales.

Exercice 2 : Dérivées partielles

1. $f(x, y) = \sqrt{1+x+y} = (\sqrt{\circ} f_1)(x, y)$ où $f_1 : (x, y) \mapsto 1+x+y$ est une fonction polynomiale donc de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . La fonction $\sqrt{}$ étant de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , on en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid 1+x+y < 0\}$.

En particulier f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et $\nabla f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \\ \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \end{array} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et donc

$$\nabla^2 f(x, y) = \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}} & -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}} \\ -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}} & -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}} \end{array} \right) = -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $f(x, y) = e^x + x = (\varphi \circ p_1)(x, y)$ où $\varphi : z \mapsto e^z + z$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . Donc f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par composition.

En particulier f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (e^x + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et donc

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $f(x, y) = \frac{2y}{y^2 + 1} = \frac{2p_2(x, y)}{(\varphi \circ p_2)(x, y)}$ où $\varphi : z \mapsto z^2 + 1 \neq 0$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Donc $\varphi \circ p_2$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par composition et f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par quotient.

En particulier f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2(1-y^2)}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix} = \frac{2(1-y^2)}{(y^2+1)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et donc

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4y \frac{-y^4 + 2y^2 + 3}{(y^2 + 1)^4} \end{pmatrix} = -4y \frac{-y^4 + 2y^2 + 3}{(y^2 + 1)^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $f(x, y) = x^y = e^{p_2(x, y)(\ln \circ p_1)(x, y)}$. Or $\ln \circ p_1$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par composition donc $p_2 \times (\ln \circ p_1)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par produit et donc f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par composition.

En particulier f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ \ln(x)x^y \end{pmatrix}$.

Et donc

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} yx^{y-2} & x^{y-1}(1 + y \ln(x)) \\ x^{y-1}(1 + y \ln(x)) & \ln(x)^2 x^y \end{pmatrix}.$$

5. $f(x, y) = x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4$. On a f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 en tant que fonction polynomiale de 2 variable.

En particulier f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y + 3y^2 \\ 2x + 6xy + 4y^3 \end{pmatrix}$.

Et donc

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 + 6y \\ 2 + 6y & 6x + 12y^2 \end{pmatrix}$$

6. Même principe.

7. Même principe.

Exercice 3 : Sans point critique

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = 1 + \ln(x + y)$

1. $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est la droite d'équation $y = -x$ donc U est le demi-plan supérieur délimité par la droite D .

2. On a $f = 1 + \ln \circ (p_1 + p_2)$ donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur U car p_1 et p_2 sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et \ln est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

De plus :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}.$$

3. On remarque : $\forall (x, y) \in U, \frac{1}{x+y} \neq 0$ donc l'équation

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de solution.

Or tout extremum local est un point critique.

Ccl : la fonction f n'admet pas d'extremum local sur U .

Exercice 4 : Nature des points critiques

Soit f la fonction définie sur par $f(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$

1. En développant on a $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 9xy - 2x^2 + 14x - y^2 + 8y - 12$.

f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 car polynomiale.

2. f est en particulier de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et de plus :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - 9y - 4x + 14 \\ x^2 + 2xy - 9x - 2y + 8 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on ne nous demande pas de déterminer tous les points critiques de f .

Vérifions donc que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de f , c'à d sont solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant il vient :

$$\nabla f(4, 2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2^2 - 9 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 14 \\ 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 9 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, 3) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 - 9 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 14 \\ 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 9 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ccl : Les points $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont bien des points critiques de f

3. Déterminons la matrice hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - 4 & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}.$$

• nature du point critique $(4, 2)$:

$$\text{Notons } H = \nabla^2 f(4, 2) \text{ on a donc } H = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H (symétrique).

D'après le cours d'algèbre on sait que λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation $\lambda^2 - 6\lambda + 144 = 0$.

Par conséquent d'après la relation coefficient racines on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = 144 > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 6 > 0 \end{cases}.$$

Il s'ensuit que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice hessienne H sont strictement positives.

Ccl : f admet en $(4, 2)$ un minimum local.

• nature du point critique $(2, 3)$:

Notons $H = \nabla^2 f(2,3)$ on a donc $H = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H (symétrique).

D'après le cours d'algèbre on sait que λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation $\lambda^2 - 4\lambda - 96 = 0$.

Par conséquent d'après la relation coefficient racines on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = -96 < 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 4 > 0 \end{cases} .$$

Il s'ensuit que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice hessienne H sont de signes opposés.

Ccl : f admet en $(4,2)$ un point col.

Type concours

Exercice 5 : EML 2016

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Les fonctions $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant continues sur $]0, +\infty[$, la fonction f est continue sur ce même intervalle en tant que produit et différence de fonctions continues.

La croissance comparée des fonctions identité et logarithme donne la limite suivante : $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) = 0$. On en déduit $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 - t \ln(t) = 0$ soit

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0).$$

Ceci justifie la continuité de f en 0. En conclusion,

la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

2. En tant que produit et différence de fonctions de classe C^2 sur $]0, +\infty[$

la fonction f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \text{ et } f''(t) = 2 - \frac{1}{t}.$$

3. Pour déterminer le signe de f' , on utilise ses variations et on note que $f'(\frac{1}{2}) = 1 - \ln(\frac{1}{2}) - 1 = \ln(2) > 0$. Le tableau des variations de f (avec les valeurs aux bornes) est alors :

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(t)$	-	0	+
f'	\searrow	$\ln(2)$	\nearrow
$f'(t)$	+		
f	0	\nearrow	$+\infty$

La limite de f en $+\infty$ est a priori indéterminée. On factorise sous la forme : $f(t) = t^2 \left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right)$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$ et que par négligeabilité du logarithme devant l'identité on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$, il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

4. (a) Pour étudier l'existence d'une tangente à C au point d'abscisse 0, étudions la limite en 0 de

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = t - \ln(t)$$

Sous cette forme, il est immédiat que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = +\infty$. Cette limite infinie montre que f n'est pas dérivable en 0. Toutefois,

la courbe C admet une (demi-)tangente qui est l'axe des ordonnées.

- (b) La fonction f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ avec $f''(t) = 2 - \frac{1}{t}$. Cette quantité s'annule en changeant de signe si, et seulement si, $t = \frac{1}{2}$. On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Ceci prouve que

C admet un point d'inflexion et un seul : I de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2}\right)$.

- (c) L'étude précédente permet de tracer C et ceci est fait à la figure. On place la demi-tangente à l'origine et la tangente au point d'inflexion qui a pour équation $y = \ln(2)\left(t - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)t + \frac{1}{4}$.

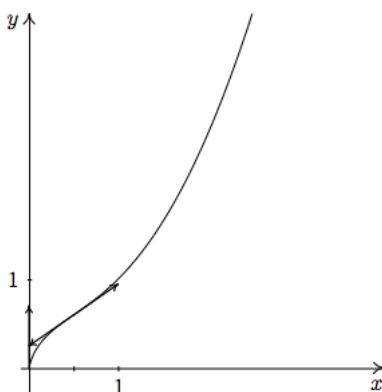


FIGURE 1 – Courbe représentative C

5. Sur $[0, +\infty[$ la fonction f est continue, strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. On en déduit que f est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Comme 1 appartient à l'ensemble d'arrivée de f , l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$. De plus, comme $f(1) = 1$, cette unique solution est 1. En conclusion,

l'équation $f(t) = 1$ admet une solution et une seule sur $[0, +\infty[$ qui est 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

6. On peut décomposer F en

$$F = p_1 \times \ln \circ p_2 - p_2 \times \ln \circ p_1.$$

Les fonction p_1 et p_2 étant de classe $\mathcal{C}^é$ sur \mathbb{R}^2 et \ln étant $\mathcal{C}^é$ sur \mathbb{R}_+^* , on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^é$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par composition, produit et différence.

L'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de F est donc justifiée et sont données par :

$$\partial_1 F(x, y) = \ln(y) - \frac{y}{x}, \quad \partial_2 F(x, y) = \frac{x}{y} - \ln(x).$$

7. (a) Un point (x, y) de $]0; +\infty[^2$ est un point critique de F si

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \partial_1 F(x, y) = 0 \\ \partial_2 F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$$

Comme ici $x > 0$ et $y > 0$, on a nécessairement avec cette dernière égalité $\ln(x) > 0$ et donc $x > 1$ et donc $\ln(x) \neq 0$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ y = \frac{x}{\ln(x)} \end{cases} .$$

En reportant la valeur de y dans la première équation il vient :

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) - \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = 0 \\ y = \frac{x}{\ln(x)} \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) - \ln(\ln(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \\ y = \frac{x}{\ln(x)} \end{cases} \iff \begin{cases} f(\ln(x)) = 1 \\ y = \frac{x}{\ln(x)} \end{cases} .$$

Finalement :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si : } x > 1, y = \frac{x}{\ln(x)} \text{ et } f(\ln(x)) = 1.$$

- (b) L'équation $f(t) = 1$, d'inconnue t , admet une unique solution sur $]0, +\infty[$ qui est $t = 1$. On en déduit que l'équation $f(\ln(x)) = 1$, d'inconnue x , admet une unique solution sur $]1, +\infty[$ qui vérifie $\ln(x) = 1$ ce qui donne $x = e$. Il s'ensuit $y = \frac{e}{\ln(e)} = e$. Ainsi

$$F \text{ admet un unique point critique qui est : } (e, e).$$

8. F est de classe \mathcal{C}^2 donc on peut déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de F :

$$\partial_{1,1}^2 F(x, y) = \frac{y}{x^2} ; \partial_{1,2}^2 F(x, y) = \partial_{2,1}^2 F(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} ; \partial_{2,2}^2 F(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Au point critique (e, e) la matrice hessienne de F est

$$\nabla^2 F(e, e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir : $\frac{1}{e}$ et $-\frac{1}{e}$. Les valeurs propres de la matrice hessienne de F au point (e, e) sont non nulles et de signes opposés et on peut conclure :

$$\text{la fonction } F \text{ n'admet pas d'extremum local en } (e, e) \text{ mais elle admet un point col.}$$

Exercice 6 :EML 2017

Corrigé en cours.