

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

Équivalents

EXERCICE 4.1. Recherche d'équivalent et calculs de limite

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes puis leur limite aux points indiqués :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\frac{x-1}{x+1}$ en $+\infty$ et en 0 | 5. $1+x^2 \ln(x)$ en $+\infty$ et en 0 | 9. $\frac{x^2-2x+1}{\ln x}$ en 1 |
| 2. $(3x^2-5x+2)^4$ en $-\infty$ et en 0 | 6. $x^2 e^{-x} + x + 1$ en $+\infty$ et en 0 | 10. $x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ en $+\infty$ |
| 3. $e^{-x} + \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et en 0 | 7. $\frac{(e^x-1)^2}{3x \ln(1+x)}$ en 0 | 11. $\frac{1}{x} \ln(1-4x^2)$ en 0 |
| 4. $\ln(x) - x$ en $+\infty$ et en 0^+ | 8. $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$ en 0^+ | 12. $x \ln(x^2-1) - x \ln(x^2)$ en $+\infty$ |

EXERCICE 4.2. Soit $n \geq 1$, un entier et x un réel tel que $x \neq 1$.

- Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ en fonction de n et x .
- En déduire que $x^n - 1 \underset{1}{\sim} n(x-1)$.

Développements limités

EXERCICE 4.3. Développements limités usuels

Déterminer le DL d'ordre 2 en 0 puis un équivalent en 0 des fonctions suivantes :

- | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1. $\frac{x}{1+x}$ | 2. $\ln(1+x) + 2e^x$ | 3. $(x+1)e^{-x} - x$ | 4. $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ |
|--------------------|----------------------|----------------------|-------------------------------|

EXERCICE 4.4. Formule de Taylor Young

A l'aide de la formule de Taylor Young, déterminer le DL d'ordre 2 des fonctions suivantes :

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. $x \ln(x)$ en e | 2. $\sqrt{2+x}$ en 2 | 3. $\frac{1}{1+x+x^2}$ en 1 |
|----------------------|----------------------|-----------------------------|

EXERCICE 4.5. En utilisant un développement limité en 0 à un ordre adapté, déterminer les limites suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1 + 2x}{x^2}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^x - 1 - x}$ |
|--|--|

Application des DL

EXERCICE 4.6. Soit f définie sur par $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$

- Déterminer le développement limité de f d'ordre 2 en 0
- Déterminer l'équation de la tangente (T) en 0 puis étudier la position relative de (C_f) et (T) au voisinage de 0.

EXERCICE 4.7. Soit $f(x) = x^2[\ln(x+1) - \ln(x)]$ pour $x > 0$

- Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
[indication : écrire le DL d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+u)$]
- En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$

EXERCICE 4.8. Soit $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$

- Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
[indication : écrire le DL d'ordre 2 en 0 de e^u]
- En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (D) quand $x \rightarrow +\infty$ puis préciser la position relative de (C_f) et (D) quand $x \rightarrow +\infty$.

Extraits de concours

EXERCICE 4.9 (EML2011). On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}.$$

- Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R}_+^* (on pourra montrer au préalable que $\ln x + \frac{1}{x} > 0$ sur \mathbb{R}_+^*)
- Tracer l'allure de C sa courbe représentative sur $]0, 1]$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4.10 (EML 2012). On considère l'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})

- Montrer que f est continue en 0 puis que Γ admet une demi-tangente verticale en O .
- Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
- Déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.
- Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$ et tracer l'allure de Γ sur $[0, 1]$ en faisant apparaître trois tangentes judicieusement choisies. On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

EXERCICE 4.11 (EML 2014). On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$.

- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 et (facultatif) montrer que ce point est un point d'inflexion.
- Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de \mathcal{C} et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

EXERCICE 4.12 (ECRICOME 2011). On considère l'application φ défini sur \mathbb{R}_+ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

1. Établir que φ est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
2. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
3. Dresser le tableau de variation de φ

EXERCICE 4.13 (ECRICOME 2012). On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2, au voisinage de 0 En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

EXERCICE 4.14 (ECRICOME 2014). On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Établir que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

4. Prouver que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 4.15 (EML 2009). On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 (b) Justifier que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
 (c) Montrer : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$
 (d) Établir que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1-x)e^x - 1$$

- (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.
- (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
Dresser le tableau des variations de f .
- (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
- (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .