FEUILLE D'EXERCICES

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS
CORRECTIONS

Équivalents

Exercice 1 :

1. (fonctions polynomiales) $\dfrac{x-1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \underset{0}{\sim} -1$
2. (fonctions polynomiales) $(3x^2-5x+2)^4 \underset{-\infty}{\sim} (3x^2)^4 = 81x^8$ et $(3x^2-5x+2)^4 \underset{0}{\sim} (2)^4 = 16$
3. $e^{-x} + \dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$ car $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$
   $e^{-x} + \dfrac{1}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ car $e^{-x} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
4. $\ln(x) - x \underset{+\infty}{\sim} -x$ car $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ par C.C.
   $\ln(x) - x \underset{0^+}{\sim} -x$ car $x \underset{0^+}{=} o(\ln(x))$ par C.C.
5. $1 + x^2\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2\ln(x)$ et $1 + x^2\ln(x) \underset{0^+}{\sim} 1$ car $x^2\ln(x) \underset{0}{=} o(1)$ par C.C.
6. $x^2e^{-x} + x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ car $x^2e^{-x} \underset{+\infty}{=} o(1)$ par C.C.
   $x^2e^{-x} + x + 1 \underset{0}{\sim} 1$ car $x^2e^{-x} + x \underset{0^+}{=} o(1)$.
7. (équivalents usuels) $\dfrac{(e^x-1)^2}{3x\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$.
8. (équivalents usuels) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x}{x^2} = \dfrac{1}{2x}$.
9. (équivalents usuels) $\dfrac{x^2-2x+1}{\ln x} \underset{1}{\sim} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$.
10. (équivalents usuels $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ avec $u = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$) $x^2\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{x} = x$.
11. (équivalents usuels $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ avec $u = 4x^2x \longrightarrow 0$) $\dfrac{1}{x}\ln\left(1-4x^2\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x} \times 4x^2 = 4x$.
12. $x\ln(x^2-1) - x\ln(x^2) = x\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$.

Exercice 2 : Soit $n \geqslant 1$, un entier et x un réel tel que $x \neq 1$.

1. Formule des termes consécutifs d'une suite géométrique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{x\longrightarrow 1}{\longrightarrow} n$ et $n \in \mathbb{N}^*$ est non nul donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{1}{\sim} n$.

   Ainsi $$\frac{1-x^n}{1-x} \underset{+\infty}{\sim} n \Longleftrightarrow 1-x^n \underset{+\infty}{\sim} n(1-x) \Longleftrightarrow x^n - 1 \underset{+\infty}{\sim} n(x-1).$$

Développements limités

Exercice 3 : En utilisant les 3 $DL_2(0)$ usuels :

1.

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{x}{1+x} & \underset{0}{=} & x(1+x)^{-1} \\
& \underset{0}{=} & x(1-x+\frac{(-1)(-1-1)}{2}x^2+o(x^2)) \\
& \underset{0}{=} & x(1-x+x^2+o(x^2)) \\
& \underset{0}{=} & x-x^2+\underbrace{x^3+o(x^3)}_{=o(x^2)} \\
DL_2(0) & \underset{0}{=} & x-\underbrace{x^2+o(x^2)}_{=o(x)} \\
DL_1(0) & \underset{0}{=} & x+o(x)
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1+x)+2e^x & \underset{0}{=} & x-\frac{x^2}{2}+2(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \\
& \underset{0}{=} & x-\frac{x^2}{2}+2+2x+x^2+o(x^2) \\
DL_2(0) & \underset{0}{=} & 2+3x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \\
DL_1(0) & \underset{0}{=} & 2+3x+o(x)
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+x} & \underset{0}{=} & (1+x)^{\frac{1}{2}} \\
& \underset{0}{=} & 1+\frac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+o(x^2) \\
DL_2(0) & \underset{0}{=} & 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2) \\
DL_1(0) & \underset{0}{=} & 1+\frac{x}{2}+o(x)
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{(1-x)^2} & \underset{0}{=} & (1-x)^{-2} \\
& \underset{0}{=} & 1-2(-2x)+\dfrac{(-2)((-2)-1)}{2}x^2+o(x^2) \\
DL_2(0) & \underset{0}{=} & 1+4x+3x^2+o(x^2) \\
DL_1(0) & \underset{0}{=} & 1+4x+o(x)
\end{array}$$

Exercice 4 : A l'aide de la formule de Taylor Young où on aura remarqué que dans tous les cas la fonction f est deux fois dérivable au point indiqué (et même plus) :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big).$$

1. $f(x) = x\ln(x)$ en e :

$\begin{cases} f(e) = e \\ f'(e) = 2 \\ f''(e) = \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow x\ln(x) \underset{e}{=} e + 2(x-e) + \frac{1}{e}(x-2)^2 + o\big((x-e)^2\big)$

2. $f(x) = \sqrt{2+x}$ en 2 :

$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f'(2) = \frac{1}{4} \\ f''(2) = -\frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2+x} \underset{2}{=} 2 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{64}(x-2)^2 + o\big((x-2)^2\big)$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ en 1 :

$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{3} \\ f'(1) = -\frac{1}{3} \\ f''(1) = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{1+x+x^2} \underset{1}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{4}{18}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$

Exercice 5 : En utilisant un $DL_2(0)$ usuel :

1. On a $e^{-2x} \underset{0}{=} 1 + (-2x) + \frac{1}{2}(-2x)^2 + o(x^2) \Rightarrow e^{-2x} - 1 + 2x \underset{0}{=} 2x^2 + o(x^2) \Rightarrow e^{-2x} - 1 + 2x \underset{0}{\sim} 2x^2$.

   Finalement $\dfrac{e^{-2x}-1+2x}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1+2x}{x^2} = 2$.

2. $\begin{cases} \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1+x) - x \underset{0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ e^x - 1 - x \underset{0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2 \\ e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

   Finalement : $\dfrac{\ln(1+x)-x}{e-1-x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{e-1-x} = 1$.

Application des DL

Exercice 6 : Soit f définie sur par $f(x) = \ln(1+x+x^2)$

1. En posant $u = x + x^2$ on a bien $u \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ et avec $|: n(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + u(u)$ il vient :

$$\begin{array}{rcl} \ln(1+x+x^2) & \underset{0}{=} & x + x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) \\ & \underset{0}{=} & x + x^2 - \frac{x^2+2x^3+x^4}{2} + o(x^2) \\ & \underset{0}{=} & x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{tous les autres termes étant dans le } o(x^2). \end{array}$$

2. Equation de la tangente en 0 : d'après le $DL_2(0)$ on déduit le $DL_1(0)$: $\ln(1+x+x^2) \underset{0}{=} x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ $\boxed{(T_0) : y = x}$.

Position relative de (C_f) et (T) au voisinage de 0 : d'après le $DL_2(0)$ $\ln(1+x+x^2) \underset{0}{=} x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ on a

$$ln(1+x+x^2) - x \underset{0}{=} \underbrace{\frac{3}{2}}_{>0} x^2 + o(x^2).$$

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 7 :
Soit $f(x) = x^2[\ln(x+1) - \ln(x)]$ pour $x > 0$.

Remarquons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) \underset{+\infty}{=} o(1)$.

Déterminons un développement asymptotique (c'est à dire un DL au voisinage de $+\infty$) en utilisant le DL usuel $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u}{2} + o(u^2)$ avec $u = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
x^2[\ln(x+1) - \ln(x)] &= x^2 \ln\left(\tfrac{x+1}{x}\right) \\
&= x^2 \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}\right) + o\left(\left(\tfrac{1}{x}\right)^2\right) \quad \text{car } \tfrac{1}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{+\infty}{=} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} x - 1 + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$f(x) - (x-1) \underset{+\infty}{=} o(1)$$

Donc en posant $\boxed{\varphi(x) = f(x) - (x-1)}$ on a bien : $\boxed{f(x) = x - 1 + \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) \underset{+\infty}{=} o(1)}$.
Ainsi $a = 1$ et $b = -1$.

Exercice 8 : Soit $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$

1. Déterminons un développement asymptotique (c'est à dire un DL au voisinage de $+\infty$) en utilisant le DL $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u}{2} + o(u^2)$ avec $u = \frac{1}{x}$) :

$$\begin{aligned}
xe^{\frac{1}{x}} &\underset{+\infty}{=} x\left(1 + \tfrac{1}{x} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o\left(\left(\tfrac{1}{x}\right)^2\right)\right) \quad \text{car } \tfrac{1}{x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{+\infty}{=} x + 1 + \tfrac{1}{2x} + o\left(\tfrac{1}{x}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} x + 1 + \tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{x}o(1)
\end{aligned}$$

   Ainsi on a :

$$f(x) - (x+1) - \frac{1}{2x} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}o(1)$$

   Donc en posant $\boxed{\varphi(x) = f(x) - (x+1) - \frac{1}{2x}}$ on a bien : $\boxed{(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) \underset{+\infty}{=} o(1)}$.

   Ainsi : $a = 1, b = 1$ et $c = 1$.

2. En déduire que (C_f) admet la droite d'équation (D) : $y = x+1$ comme asymptote oblique (D) quand $x \to +\infty$. De plus

$$f(x) - (x+1) = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{>0} + \frac{1}{x}o(1)$$

   Donc on en déduit que (C_f) est au-dessus de son asymptote (D) quand $x \to +\infty$.

Exercice 9 :[EML2011] On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x+\ln x)\, e^{x-1}.$$

1. • <u>Etude des variations de f :</u>

   f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ par théorèmes généraux.
   $\forall x>0, \quad f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}+x+\ln(x)\right)e^{x-1} = (1+x+g(x))e^{x-1}$ avec $g(x) = \ln(x)+\frac{1}{x}$.
   Etudions la fonction $g : x \mapsto \ln(x)+\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
   g est de classe $\mathscr{C}^1$ par théorèmes généraux et de plus : $\forall x>0, \quad g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.
   Ceci montre que g présente un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ en $x=1$. De plus $g(1)=1>0$ donc on en déduit que : $\boxed{\forall x>0, \quad g(x)>0}$.

   D'après l'étude du signe de g on en déduit que : $\boxed{\forall x>0, \quad f'(x)>0}$.

   • <u>Limites aux bornes :</u>

   • En $+\infty$: $x+\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ puisque par croissances comparées : $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \Rightarrow f(x)) \underset{+\infty}{\sim} xe^{x-1}$ et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$

   • En 0^+ : $x+\ln(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$ puisque : $x \underset{0^+}{=} o(\ln(x)) \Rightarrow f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x) lne^{x-1} \underset{0^+}{\sim} e^{-1}\ln(x)$ puisque $e^{x-1} \longrightarrow e^{-1}$ quand $x \longrightarrow 0$ et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

   D'où le tableau :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

2. Tangente au point d'abscisse 1 : $y = f(1)+f'(1)(x-1) \iff y = 1+3(x-1) \iff y = 3x-2$.

Exercice 10 :[EML 2012] On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. Par croissances comparées $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} t\ln(t) = 0$ et $f(0)=0$ donc f est continue en 0.

   Γ admet une demi- tangente verticale en $O \iff \lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \pm\infty$.

   Or $\dfrac{f(t+h)-f(0)}{h} = \dfrac{(h)\ln(h)}{h} = \ln(h) \underset{h\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

2. Montrons que f est convexe sur $]0;+\infty[$:
   f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et de plus pour tout $t>0$:

$$f'(t) = \ln(t)+1 \quad \text{et} \quad f''(t) = \frac{1}{t} > 0.$$

   On en conclut que f est bien convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminons les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses c'est à dire les points d'abscisses $t \in \mathbb{R}_+$ solutions de l'équation $f(t) = 0$.

   Or $f(t) = 0 \iff t\ln(t) = 0 \iff t = 0$ ou $\ln(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = e$.

   De plus $f(0) = 0$ et f(e)=e.

<u>Ccl :</u> Les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses sont $\boxed{(0;0) \text{ et } (e;e)}$.

4. D'après les calculs précédents on a $f(t) > 0 \iff \ln(t) + 1 > 0 \iff t > e^{-1}$.

   De plus $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} t\ln(t) = +\infty$ par produit.

   D'où le tableau suivant :

t	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   On peut prendre les trois tangentes :

   - $T_0 : x = 0$ (demi-tangente verticale)
   - $T_{\frac{1}{e}} : y = 0$ (tangente horizontale)
   - $T_1 : y = x - 1$ (tangente en 1).

Exercice 11 :

Exercice 12 : [ECRICOME 2011]

1. Pour la continuité en 0 on montre que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$:

   Par croissances comparées $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} x^2 \ln(x) = 0$ et $\varphi(0) = 1$ donc est continue en 0.

   Pour la dérivabilité on passe par le taux d'accroissement :

   $$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^+} -h\ln(h) = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

   Donc φ est dérivable en 0 et $\boxed{\varphi'(0) = 0}$.

2. On étudie la position relative de la courbe de φ et de sa tangente en 0.

   L'équation de la tangente en 0 est : $y = 1$.

   Etudions donc le signe de $\varphi(x) - 1 = -x^2 \ln(x)$.

   Ainsi, lorsque $x \longrightarrow 0^+$ $\ln(x) < 0$ et la quantité $-x^2 \ln(x)$ est donc positive.

   <u>Ccl :</u> $\boxed{\text{Au voisinage de 0 la courbe de } \varphi \text{ est au-dessus de sa tangente en 0}}$.

3. D'après ce qui précède et en calculant la dérivée de φ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\varphi'(x) = \begin{cases} -x(2\ln(x)+1) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

   On en déduit que $\varphi'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2\ln(x)+1<0 \Longleftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}}$.

   Par ailleurs, $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

   D'où le tableau de variations avec $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 1+\frac{1}{2e}$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 13 :

Exercice 14 :

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$:

   • f est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux.

   • De plus $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} 1$ puisque $\ln(1+x)) \underset{0}{\sim} x$ et $f(0)=1$ donc on en déduit que $f(x) \underset{0}{\sim} f(0)$ et donc que f est continue en 0.

   Ccl : Les deux points précédents montrent que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux.

3.
$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} &\underset{0}{=} x - \tfrac{1}{2}x^2 - x(1-x+x^2) + o(x^2)\big) \\ &\underset{0}{=} x - \tfrac{1}{2}x^2 - x + x^2 + o(x^2)\big) \\ &\underset{0}{=} \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)\big) \end{aligned}$$

   Or par calcul de dérivée :

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

   Ccl : $\boxed{f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}}$.

4. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

Exercice 15 :
Contenu dans le DM5. Voir correction.