

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Calculs d'intégrales

EXERCICE 6.1. Calculs en tout genre

Etudier la nature des intégrales généralisée suivantes puis en donner la valeur en cas de convergence (on pourra d'emblée chercher une primitive, par IPP ou par changement de variable).

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ par primitivation

2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt$ par primitivation

3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ par primitivation

4. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$ par primitivation

5. $\int_{-\infty}^0 e^{-2t} dt$ par primitivation

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ par primitivation

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$ par primitivation

8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} dt$ en écrivant $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt$ en écrivant $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$

10. $\int_1^{+\infty} t \ln(t) dt$ par IPP

11. $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ par double IPP

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ par IPP

13. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt$ en posant $u = e^{-t}$

14. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$ en posant $u = \sqrt{t}$.

EXERCICE 6.2. Nature d'intégrales en utilisant les critères de comparaisons

En appliquant le critère d'équivalence, étudier la nature des intégrales suivantes.
(En cas de convergence le calcul de l'intégrale n'est pas demandé).

1. $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$

3. $\int_0^1 \ln(u) du$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x} dx$

5. $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) dx$

6. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx$

7. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$

8. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt$

9. $\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$

10. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

11. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(u)} du$

12. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$

13. $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ (EML 2000)

14. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$ (ESCP 2005)

Type concours

EXERCICE 6.3. Une suite d'intégrales généralisées

Soit $(I_n)_{n \geq 1}$ la suite d'intégrales définie pour tout entier $n \geq 1$ par $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)} dt$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante puis convergente.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$.
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 6.4. Une fonction définie par une intégrale généralisée : la fonction Gamma

Soit Γ la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ est convergente.
2. Montrer, à l'aide d'une IPP soigneusement utilisée, que $\forall a > 0, \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6.5. Moments d'une loi exponentielle

Pour $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on note J_n l'intégrale généralisée

$$J_n = \int_0^{+\infty} \lambda t^n e^{-\lambda t} dt.$$

1. Montrer que J_0, J_1 et J_2 existe et les calculer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda t^n e^{-\lambda t} dt$.
 - (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation : $J_n = \frac{n}{\lambda} J_{n-1}$.
 - (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $J_n = \frac{n!}{\lambda^n}$.

EXERCICE 6.6 (HEC 2014).

1. Etablir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx$. On la note J_p .

2. (a) Etablir la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x > 0, \quad \frac{x^p}{e^x - 1} = x^p \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

- (b) Pour tout $(p, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, calculer $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X x^p e^{-kx} dx$. *Indication : utiliser le changement de variable $u = kx$*

3. (a) Justifier que $\forall x \geq 0, e^x - 1 \geq x$.
- (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

4. Déduire des questions précédentes l'encadrement

$$0 \leq J_p - p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

5. Rappeler pour quelles valeurs de p la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{p+1}}$ converge et exprimer pour ces valeurs sa somme en fonction de J_p .