FEUILLE D'EXERCICES

INTÉGRALES IMPROPRES CORRECTIONS

Exercice 1 :

1. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ Forme $u'u$

$\displaystyle\int_1^X \frac{\ln t}{t}dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^X \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t}dt$ DV

2. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue sur $[2,+\infty[$ Forme $\dfrac{u'}{u}$

$\displaystyle\int_2^X \frac{1}{t\ln t}dt = [\ln(\ln t)]_2^X \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}dt$ DV

3. PB en 1 car $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$ et 1 est une valeur interdite Forme $u'u^{1/2}$

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x \underset{x\longrightarrow1}{\longrightarrow} 2 \Rightarrow \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ CV et vaut 2.

4. Pb en 1 et en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]1;+\infty[$ et en 1 qui est une valeur interdite Forme $u'u^{1/2}$

$\displaystyle\int_x^X \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_x^X \underset{X\longrightarrow+\infty,x\longrightarrow1}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ DV.

Remarque : attention ici il y a une borne impropre convergente (en 1) et l'autre divergente (en $+\infty$) ce qui donne bien au total une intégrale divergente.

5. Intégrale exponentielle $\lambda = 2$ (**voir cours : intégrales de références**) $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$ CV et vaut $\dfrac{1}{2}$.

6. PB en $-\infty$ et $+\infty$ car $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Forme $u'e^u$

$\displaystyle\int_{-X}^X te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-X}^X = 0 \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ CV et vaut 0.

Remarque : on aurait pu utiliser aussi l' imparité de la fonction $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ CV et vaut 0.

7. PB en $-\infty$ et $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Forme $-\dfrac{u'}{u^2}$

$\displaystyle\int_{-X}^X \frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt = \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_{-X}^X \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$ CV et vaut 1.

Remarque : on dit dans ce cas que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ est une densité de probabilité (d.d.p), voir cours suivant :)

8. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\displaystyle\int_1^X \frac{1}{t(t+1)}dt = \int_1^X \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = [\ln t - \ln(t+1)]_1^X = \left[\ln\left(\ln\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^X \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}dt$ CV et vaut $\ln 2$.

9. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\displaystyle\int_1^X \frac{1}{(t+1)(t+2)}dt = \int_1^X \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \left[\ln\left(\ln\frac{t+1}{t+2}\right)\right]_1^X \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}dt$ CV et vaut $\dfrac{3}{2}$.

10. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto t^2e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Forme double IPP

$\displaystyle\int_1^X t^2e^{-t}dt = [-t^2e^{-t}]_1^X + 2\int_1^X te^{-t}dt = e^{-1} - X^2e^{-X} + 2\left([-te^{-t}]_1^X + \int_1^X e^{-t}dt = 5e^{-1} - (X^2+2X+2)e^{-X}\right.$

Donc $\displaystyle\int_1^X t^2e^{-t}dt \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 5e^{-1} \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ CV et vaut $\dfrac{5}{e}$.

Remarque : on ne fait les IPP que sur des intégrales classiques (avant de faire une limite).

11. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Forme IPP

$\displaystyle\int_1^X \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t(t+1)}dt = -\frac{\ln X}{1+X} + \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^X \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$ CV et vaut $\ln 2$.

12. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Forme changement de variable $u = e^{-t}$ ou $\dfrac{u'}{u}$.

$$u = e^{-t}, \quad du = -e^{-t}dt, \quad \frac{-du}{1+u} = \frac{e^{-t}dt}{1+e^{-t}}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(X) = e^{-X}.$$

$\displaystyle\int_0^X \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = -\int_1^{e^{-X}} \frac{1}{1+u}du = -[\ln(1+u)]_1^{e^{-X}} \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt$ CV et vaut $\ln 2$.

Remarque : on ne fait les changements de variables que sur des intégrales classiques (avant de faire une limite).

13. Pb en $+\infty$ car $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Forme changement de variable $u = \sqrt{t}$.

$$u = \sqrt{t}, \quad du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \quad \Leftrightarrow \quad 2udu = dt, \quad 2udue^{-u} = e^{-\sqrt{t}}dt, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(X) = \sqrt{X}.$$

$\displaystyle\int_0^X e^{-\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{\sqrt{X}} ue^{-u}du \underset{IPP}{=} 2\left([-ue^{-u}]_0^{\sqrt{X}} + \int_0^{\sqrt{X}} e^{-u}du\right) = 2\left(1 - (\sqrt{X+1})e^{-\sqrt{X}}\right) = -2\sqrt{X}e^{-\sqrt{X}} - 2e^{-\sqrt{X}} + 2 \underset{X\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 2$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ CV et vaut 2.

Exercice 2 :

Dans l'exercice toutes les fonctions sont positives. On peut donc sans aucun problème appliquer les trois critères de CV vus en cours (il faudra vérifier ce point à l'écrit).

1. Pb en $+\infty$ uniquement $\dfrac{t^2}{1+t^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$ CV.

2. 1. Pb en $+\infty$ uniquement donc on étudie en priorité $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$

$\dfrac{t}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$ CV.

D'après Chasles

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t^3}dt + \int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt.$$

La première intégrale est classique la deuxième car $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^3}$ est continue sur $[0,1]$ et la deuxième intégrale est impropre et CV en $+\infty$.

<u>CCL :</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$ CV.

3. Intégrale du logarithme népérien $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \ln u du$ CV et vaut 1.

Autre démo : Pb en 0 uniquement $\ln u \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du$ CV $\underset{Crit(2)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^1 \ln u du$ CV.

4. Pb en 0 et en $+\infty$ car $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+e^x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et 0 est une valeur interdite.

En 0 : $\dfrac{\ln x}{x+e^x} \underset{0}{\sim} \ln x$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln u\, du$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x+e^x}dx$ CV.
En $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{x+e^x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{e^x}$ et $\dfrac{\ln x}{e^x} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{Crit(2)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}dx$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}dx$ CV
D'après Chasles

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x+e^x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}dx.$$

et les deux intégrales CV.
<u>CCL :</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}dx$ CV.

5. Pb en $+\infty$ uniquement.

$$e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\left(1 - e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}\right).$$

Or $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1 \Rightarrow x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \underset{+\infty}{=} o(1) \Rightarrow 1-e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1} \underset{+\infty}{\sim} -\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)$ (car $e^u-1 \underset{0}{\sim} u$).
Par $DL_2(0)$ de $\ln(1+u)$ on a $-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \underset{+\infty}{=} -x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)+1 \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ DV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ DV.

6. Pb en $+\infty$ uniquement. Par comparaison :

$$x \geqslant 0, \quad \Rightarrow x^2+x \geqslant x^2 \quad \Rightarrow -\sqrt{x^2+x} \leqslant -x \quad \Rightarrow e^{-\sqrt{x^2+x}} \leqslant e^{-x}.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ CV $\underset{Crit(1)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ CV.

7. Pb en -1 et en 1. La fonction à intégrer est paire.
En 1 uniquement : $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{1-x}}$ et $\int_0^1 \dfrac{1}{4\sqrt{1-x}}dx$ CV (cf EXERCICE 1) $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$ CV.
Par parité $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$
et l'intégrale de droite CV.
<u>CCL :</u> $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$ CV.

8. Pb en 0 et en $+\infty$.
En 0 : $\dfrac{t}{e^t-1} \underset{0}{\sim} 1$ et $\displaystyle\int_0^1 1dt$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^t-1}dt$ CV.
En $+\infty$: $\dfrac{t}{e^t-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{e^t} = te^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}dt$ CV (cf EXERCICE 1 par IPP) $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt$ CV.
<u>CCL :</u> D'après Chasles $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt$ CV.

9. $\dfrac{1}{t\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{3/2}} \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{t}}dt$ DV (intégrales de Riemann).

10. $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ CV.

11. $u \geqslant 1 \quad \Rightarrow \ln u \leqslant u \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\ln u} \geqslant \dfrac{1}{u}$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u}du$ DV $\underset{Crit(1)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln u}du$ DV.

12. Fonction paire $\Rightarrow$ étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

On a $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ CV
<u>CCL :</u> Par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ CV.

13.

En 0 : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$ (équivalent classique) et $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} 1dx$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_{-1/2}^{0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$ CV.
En -1 : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{-1}{\sim} -\ln(1+x)$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln(1+x)dx = \int_{0}^{1} \ln u du$ par changement de variable $u = 1+x$.
Comme $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln u du$ CV (cours) $\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{0} \ln(1+x)dx \Rightarrow \int_{-1}^{-1/2} \ln(1+x)dx$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_{-1}^{-1/2} \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$ CV
<u>CCL :</u> D'après Chasles $\displaystyle\int_{0}^{1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$ CV

14.
En 0 : $\dfrac{\ln x}{1-x^2} \underset{0}{\sim} \ln x$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x dx$ CV $\Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{1/2} \ln x dx$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_{0}^{1/2} \dfrac{\ln x}{1-x^2} dx$ CV.
En 1 : $\dfrac{\ln x}{1-x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{1+x}$ (équivalent classique $\ln x \underset{1}{\sim} 1-x$) et $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \dfrac{1}{1+x} dx$ CV $\underset{Crit(3)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_{1/2}^{1} \dfrac{\ln x}{1-x^2} dx$ CV.
<u>CCL:</u> D'après Chasles $\displaystyle\int_{0}^{1} \dfrac{\ln x}{1-x^2} dx$ CV