

INTÉGRATION (PREMIÈRE ANNÉE)

Calculs d'intégrales

EXERCICE 6.1. Une primitive classique

- Vérifier que $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de $f : x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^e \ln(x) dx$.

EXERCICE 6.2. Calculs d'intégrales en tout genre Déterminer une primitive des fonctions suivantes

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_1^2 \frac{1}{3x^2}$ par primitivation | 6. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ par IPP |
| 2. $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt$ par primitivation | 7. $\int_0^1 t^2 e^{-2t} dt$ par double IPP |
| 3. $\int_0^2 e^{-3u} du$ par primitivation | 8. $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \ln(2x+1) dx$ en posant $u = 2x+1$ |
| 4. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ par primitivation | 9. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$ en posant $u = e^x$ |
| 5. $\int_1^e \frac{\ln u}{u} du$ par primitivation | |

Type concours

EXERCICE 6.3. Étude d'une suite d'intégrales

Soit $(I_n)_{n \geq 0}$ la suite d'intégrales définie par $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$.

- Calculer I_0 .
- Montrer que $\forall n \geq 0 : I_n \geq 0$.
 - Etablir que la suite est décroissante puis convergente.
- Justifier que $\forall x \in [0, 1], n \geq 0 : x^n \ln(1+x) \leq x^n$ (données utiles : $\ln 2 \approx 0,7, e \approx 2,7$).
 - En déduire que pour tout entier $n \geq 0 : I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- En utilisant une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 0 : I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.
 - Montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$ puis en déduire un encadrement de I_n .
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$ puis un équivalent simple de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 6.4. Une quantité dépendant de deux entiers

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on considère $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$

1. Calculer $I_{0,q}$ en fonction de q .
2. A l'aide d'une IPP, montrer que $\forall p \geq 0, \forall q \geq 1$: $I_{p+1,q-1} = \frac{p+1}{q} I_{p,q}$.
3. Montrer que $\forall p \geq 0, \forall q \geq 0$: $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

[indication : montrer par récurrence la propriété $P(p)$: $\forall q \geq 0 : I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$]

EXERCICE 6.5. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$ et $G(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

1. Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F(2x)$.
2. En déduire que G est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x > 0$: $G'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$.
3. Déterminer les variations de G .
4. Montrer que pour tout $x > 0$: $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq G(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.
En déduire la limite de $G(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0^+ .
5. Dresser le tableau de variations de G .