

INTÉGRATION ECE1

CORRECTIONS

Exercice 1 : $f : x \mapsto x \ln(x) - x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par thm généraux et de plus :

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow f'(x) = \ln(x).$$

On en déduit que f est une primitive de $x \mapsto x \ln(x) - x$

Exercice 2 :

1. par primitivation $\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6}.$

2. par primitivation $\int_0^1 \underbrace{\frac{t^2}{(1+t^3)^2}}_{=\frac{1}{3} \frac{u'}{u^2}} dt = \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{1+t^3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+t^3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$

3. par primitivation $\int_0^2 e^{-3u} du = \left[-\frac{1}{3} e^{-3u} \right]_0^2 = -\frac{1}{3} [e^{-3u}]_0^2 = -\frac{1}{3} (e^{-6} - 1) = \frac{1 - e^{-6}}{3}.$

4. par primitivation $\int_e^{e^2} \underbrace{\frac{1}{x \ln x}}_{=\frac{1}{\ln(x)} = \frac{u'}{u}} dx = [\ln |\ln(x)|]_e^{e^2} = \ln |\ln(e^2)| - \ln |\ln(e)| = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$

5. par primitivation $\int_1^e \underbrace{\frac{\ln u}{u}}_{=\frac{1}{u} \times \ln(u) = v' \times v} du = \left[\frac{1}{2} (\ln(u))^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} (\ln(e)^2 - \ln(1)^2) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$

6. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$: On pose $\begin{cases} u = (\ln(x))^2 & \Rightarrow u' = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ v' = 1 & \Rightarrow v = x \end{cases}.$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; e]$ donc par IPP on a :

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \underbrace{[x(\ln(x))^2]_1^e}_{=u(x) \times v(x)} - \int_1^e \underbrace{\frac{2}{x} \ln(x) \times x dx}_{=u'(x) \times v(x)} \\ &= (\ln(e))^2 - 1(\ln(1))^2 - 2 \int_1^e \ln(x) dx \\ &= e - 2[x \ln(x) - x]_1^e \\ &= e - 2(e \ln(e) - e - (1 \ln(1) - 1)) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^2 e^{-2t} dt &= \left[t^2 \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 2t \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \right) dt && \text{par IPP avec } \begin{cases} u = t^2 & \Rightarrow u' = 2t \\ v' = e^{-2t} & \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2t} \end{cases} \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2} + \int_0^1 t e^{-2t} dt \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2} + \left[t \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \right) dt && \text{par IPP avec } \begin{cases} u = t & \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-2t} & \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2t} \end{cases} \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2t} dt \\
&= -e^{-2} + \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^1 \\
&= -e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^0 \\
&= \frac{-3e^{-2} + 1}{2}
\end{aligned}$$

8. $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \ln(2x+1) dx$ à l'aide du changement de variable $u = 2x+1$

$$u = 2x+1 \iff du = 2dx \text{ et } \begin{cases} u(0) = 1 \\ u\left(\frac{e-1}{2}\right) = e \end{cases} .$$

La fonction $u : x \mapsto 2x+1$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , d'après le thm du changement de variables :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{e-1}{2}} \ln(2x+1) dx &= \int_1^e \ln(u) \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} [u \ln(u) - u]_1^e \\
&= \frac{1}{2} (e \ln(e) - e - (1 \ln(1) - 1)) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

9. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$ à l'aide du changement de variables $u = e^x$

$$u = e^x \iff du = e^x dx \text{ et } \begin{cases} u(\ln 2) = 2 \\ u(\ln 3) = 3 \end{cases} .$$

La fonction u étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , d'après le thm du changement de variables :

$$\begin{aligned}
\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx &= \int_2^3 \frac{u}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} \\
&= \int_2^3 \frac{1}{u + \frac{1}{u}} du \\
&= \int_2^3 \frac{u}{u^2 + 1} du \\
&= \left[\frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| \right]_2^3 \\
&= \frac{1}{2} [\ln(u^2 + 1)]_2^3 \\
&= \frac{1}{2} (\ln(10) - \ln(5)) \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{10}{5} \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Type concours

Exercice 3 : Etude d'une suite d'intégrales

$$1. I_0 = 2 \ln 2 - 1 \text{ par IPP en posant } \begin{cases} u'(x) = 1 & \Rightarrow u(x) = 1 + x \\ v(x) = \ln(1+x) & \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}.$$

$$2. (a) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], x^n \ln(1+x) \geq 0 \text{ donc par croissance de l'intégrale } \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0.$$

$$(b) \text{ Par linéarité de l'intégrale et après factorisation } I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(1-x) \ln(1+x) dx.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], x^n(1-x) \ln(1+x) \leq 0 \text{ donc par croissance de l'intégrale } \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

La suite (I_n) est décroissante et positive (donc minorée par 0) donc elle converge d'après le TCM.

$$3. (a) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2 \leq x^n \text{ car } \ln \text{ est croissante sur } [1, 2] \text{ et } \ln 2 \approx 0,7 < 1.$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], x^n \ln(1+x) \leq x^n \text{ donc par croissance de l'intégrale } \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$\text{De plus } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \text{ par un simple calcul.}$$

$$\text{D'après la question 2. (a) et l'inégalité précédente on a l'encadrement : } \forall n \geq 0 : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ le théorème des gendarmes permet d'affirmer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

$$4. (a) \text{ On pose } \begin{cases} u'(x) = x^n & \Rightarrow u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = \ln(1+x) & \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases} \quad u \text{ et } v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1] \text{ donc par IPP :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ I_n &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \begin{cases} x^n \geq 0 \\ 1+x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}.$$

$$\text{Donc par croissance de l'intégrale } \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} = \frac{1}{n+2} \text{ par un simple calcul.}$$

Al'aide de la question 3. (a) on en déduit l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(c) En multipliant par n l'encadrement précédent on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \left(\ln 2 - \frac{1}{n+2} \right) \leq n I_n \leq \frac{n \ln 2}{n+1}.$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln 2 - \frac{1}{n+2} \right) = \ln 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln 2}{n+1} = \ln 2. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \ln 2 \text{ et donc } I_n \sim \frac{\ln 2}{n}.$$

Exercice 4 : Une quantité dépendant de deux entiers Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on considère $I_{p,q} =$

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

1.

$$\begin{aligned} I_{0,q} &= \int_0^1 (1-x)^q dx \\ &= \left[\frac{-(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

2. On pose $\begin{cases} u'(x) = (1-x)^{q-1} & \Rightarrow u(x) = \frac{-(1-x)^q}{q} \\ v(x) = x^{p+1} & \Rightarrow v'(x) = (p+1)x^p \end{cases}$ u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ donc par IPP :

$$\int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx = \underbrace{\left[\frac{-(1-x)^q}{q} \times x^{p+1} \right]_0^1}_{=0} + \frac{p+1}{q} \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

$$\text{Donc } I_{p+1,q-1} = \frac{p+1}{q} I_{p,q}.$$

3. Montrons par récurrence que $P(p) : \forall q \geq 0 : I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ est vraie $\forall p \geq 0$.

Initialisation : Pour $p = 0$ et pour tout $q \geq 0$ on a démontré que $I_{0,q} = \frac{1}{q+1}$ et $\frac{p!q!}{(p+q+1)!} = \frac{q!}{(q+1)!} = \frac{1}{q+1}$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $P(p)$ est vraie et montrons que $\forall q \geq 0, I_{p+1,q} = \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}$.

On a vu que $I_{p+1,q-1} = \frac{p+1}{q} I_{p,q}$ donc $I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$.

Or par H.R. $P(p)$ est vraie donc $I_{p,q+1} = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} I_{p+1,q} &= \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1} \\ &= \frac{p+1}{q+1} \times \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!} \\ &= \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} \end{aligned}$$

$q \geq 0$ étant arbitraire ceci montre que $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : ...

Exercice 5 : Etude d'une fonction définie par une intégrale

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$ et $G(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

1. D'après la relation de Chasles : $G(x) = \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \Rightarrow \boxed{G(x) = F(2x) - F(x)}$.

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ étant continue sur $]0; +\infty[$, d'après le théorème fondamental de l'intégration F est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et par composition il en est de même de la fonction $x \mapsto F(x^2)$.

Donc par différence, la fonction G est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour tout $x > 0 : G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) \Rightarrow G'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$.

3.

$$\begin{aligned}
 G'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{\ln(1+4x^2)} > \frac{1}{\ln(1+x^2)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\ln(1+4x^2)}{2} < \ln(1+x^2) \\
 &\Leftrightarrow \ln(1+4x^2) < \ln((1+x^2)^2) \\
 &\Leftrightarrow 1+4x^2 < (1+x^2)^2 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - x^4 < 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2(2-x^2) < 0 \\
 &\Leftrightarrow 2 < x^2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2} < x \quad \text{avec } x > 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

. sur $]0, \sqrt{2}]$ la fonction G est décroissante. sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ la fonction G est croissante.4. Remarquons tout d'abord que pour tout $x > 0$ on a $x < 2x$, ce qui va nous permettre d'exploiter la propriété de croissance de l'intégrale sans difficulté.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 x \leq t \leq 2x &\Rightarrow 1+x^2 \leq 1+t^2 \leq 1+4x^2 \\
 &\Rightarrow \ln(1+x^2) \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(1+4x^2) \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)}
 \end{aligned}$$

Ainsi par croissance de l'intégrale on a bien

$$\int_x^{2x} \underbrace{\frac{1}{\ln(1+4x^2)}}_{\text{constante / à } t} dt \leq G(x) \leq \int_x^{2x} \underbrace{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}_{\text{constante / à } t} dt \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)}(2x-x) \leq G(x) \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)}(2x-x).$$

Ainsi on a bien $\forall x > 0, \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq G(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

Retenons que $\forall x > 0, \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq G(x)$:. en $+\infty$: $\ln(1+4x^2) \sim \ln(4x^2)$ et $\ln(4x^2) = 2\ln(2x) = 2\ln 2 + 2\ln x \Rightarrow \ln(1+4x^2) \sim 2\ln x$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \sim \frac{x}{2\ln x} \rightarrow +\infty \text{ par c.c.} \Rightarrow \text{par comparaison, } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty.$$

. en 0^+ : $\ln(1+4x^2) \sim 4x^2 \Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \sim \frac{1}{4x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{par comparaison } \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = +\infty.$ 5. On en déduit le tableau des variations de G :

| | | | |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| x | 0 | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $G'(x)$ | + | 0 | - |
| G | $+\infty$ | $G(\sqrt{2})$ | $+\infty$ |