FEUILLE D'EXERCICES

LOIS NORMALES

EXERCICE 9.1. Intégrales gaussiennes

En se référant à chaque fois à une loi normale, justifier la convergence et déterminer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 2. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}dt$ 4. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2t^2}dt$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dt$ 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2)^2}{4}}dt$

7. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2e^{-\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}{2}}dt$ 8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t^2+1)}dt$

EXERCICE 9.2. EDHEC 2018

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}e^{-x^2/2a} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.
   (a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   (b) On rappelle qu'en `Python` , la commande `rd.exponential(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `a`. Déduire des questions précédentes une fonction `Python` prenant en argument une valeur de `a` et permettant de renvoyer en sortie une simulation la variable aléatoire X.
4. (a) Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2e^{-x^2/2a}$, est paire.
   (b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a.
   (c) En déduire que X admet une espérance et la déterminer.
5. (a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.
   (b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2};$$

EXERCICE 9.3. Un transfert pas si évident
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. (on rappelle qu'on note Φ sa fonction de répartition).

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \begin{cases} \lfloor X \rfloor & \text{si } X \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. (a) Exprimer pour tout entier $k \geqslant 0$, la probabilité $P(Y = k)$ à l'aide de la fonction Φ.
   (b) Que vaut $P(Y = -1)$?
   (c) Vérifier que $\sum_{k=-1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.
3. (a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 0$: $e^{-\frac{k^2}{2}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$
   (b) En déduire que pour tout entier $k \geqslant 0$: $P(Y = k) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$
   (c) Conclure que Y admet une espérance (ne pas chercher à la calculer).

EXERCICE 9.4. Utilisation de la table de Φ On suppose que la distance X parcourue en mètres par un javelot suit une loi normale de paramètres m et σ^2.
A la suite de nombreuses observations, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

1. Représenter l'allure de la densité f de X. Placer sur ce graphique les valeurs 50 m,75 m et les pourcentages 10% et 25%.
2. On pose $X^* = \frac{X - m}{\sigma}$.
   (a) Quelle est la loi suivie par X^* ?
   (b) Traduire les informations données en utilisant la fonction de répartition Φ de X^*, puis à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, en déduire que :
   $$\frac{75 - m}{\sigma} \approx 1,28 \quad \text{et} \quad \frac{50 - m}{\sigma} \approx -0,67$$
   (c) Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.