

LOIS NORMALES

CORRECTION

Exercice 1 : Intégrales gaussiennes

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=1} = \sqrt{2\pi} \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ d.d.p. de } \mathcal{N}(0, 1).$$

$$2. \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \stackrel{\text{transfert}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \underbrace{E(X^2)}_{=V(X)+E(X)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} dt \stackrel{\text{transfert}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \underbrace{E(X^2)}_{\substack{\text{K.H.} \\ V(X)+E(X)^2 \\ =\frac{1}{2}+0^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$4. \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2 \times (\frac{1}{2})^2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2 \times (\frac{1}{2})^2}} \text{ d.d.p. de } \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$5. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} dt \stackrel{u=t-1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{=1} = \sqrt{2\pi} \quad \text{car on reconnaît la d.d.p. de } \mathcal{N}(0, 1)$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2)^2}{4}} dt = \sqrt{2} \sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-2)^2}{2 \times (\sqrt{2})^2}} dt}_{=1} \stackrel{\text{transfert}}{=} 2\sqrt{\pi} \quad \text{car on reconnaît la d.d.p. de } \mathcal{N}(2, 2)$$

$$7. \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{2}} dt \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} E(X^2) = \sqrt{\pi} (V(X) + E(X)^2) = \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$8. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t^2+1)} dt = e^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt = 2e^{-2} \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt = 2e^{-2} \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{e^{-2} \sqrt{2\pi}}{2} \quad \text{d'après la question 4.}$$

Exercice 2 : EDHEC 2018

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrons que la fonction f est une densité :

- f est soit nulle soit égale à la fonction $x \mapsto \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}$ sur \mathbb{R}_+ avec $a > 0$. Donc f est positive sur \mathbb{R} .
- f est clairement continue sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- donc elle est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.
- Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ cv et vaut 1 :

Par Chasles, comme f est nulle sur \mathbb{R}_- on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} dx.$$

Posons $A > 0$.

$$\int_0^A \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a}} \right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2a}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \quad (a > 0)$$

Ccl : f est donc bien une d.d.p.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f

2. Déterminons la fonction de répartition F_X de X .

On suppose que X admet pour d.d.p. f donc on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

1er cas : $x \leq 0$

Comme f est nulle sur \mathbb{R}_- , on en déduit que $F_X(x) = 0$.

2ème cas : $x > 0$

Comme f est nulle sur \mathbb{R}_- , par Chasles :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2a}} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} \end{aligned}$$

$$\text{Ccl : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \frac{X^2}{2a}$.

(a) Montrons que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1 :

On détermine la fonction de répartition F_Y de la variable Y :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x).$$

Remarquons tout d'abord que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2a}$ est positive sur \mathbb{R}_+ (et même sur \mathbb{R}).

1er cas : $x < 0$

$(Y \leq x)$ est impossible donc $F_Y(x) = 0$.

2ème cas : $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(X^2 \leq 2ax) \quad a > 0 \\ &= P(|X| \leq \sqrt{2ax}) \quad \text{par croissance de la racine carrée et vu que } a, x \text{ sont positifs} \\ &= P(X \leq \sqrt{2ax}) \quad \text{car } X \text{ est positive} \\ &= F_X(\sqrt{2ax}) \end{aligned}$$

Or d'après la définition de F_X on a $F_X(z) = 1 - e^{-\frac{z^2}{2a}}$ pour tout z positifs.

Il est bien évident que $z = \sqrt{2ax}$ est positif, donc

$$F_X(\sqrt{2ax}) = 1 - e^{-\frac{(\sqrt{2ax})^2}{2a}} \rightarrow F_Y(x) = 1 - e^{-x}.$$

On vient de montrer que $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ce qui correspond à la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

Ccl: $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(b) D'après les question précédente $X = \sqrt{2aY}$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

On en déduit que la commande `np.sqrt(2*a*rd.exponential(1))` renvoie une simulation de la variable X .

4. (a) $g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x^2)/2a} = x^2 e^{-x^2/2a} = g(x)$ et donc g est paire.

(b) Soit Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a , de d.d.p. donnée par $\varphi_{0,a} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$.

On sait que Z admet un moment d'ordre 2 et de plus d'après le théorème de transfert :

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_{0,a}(x) dx \Rightarrow (*) \quad E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx.$$

(c) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge absolument.

$$\text{Or par Chasles } \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a}} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

et d'après (*), l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ converge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ cv et on en déduit que X admet une espérance.

De, plus :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} g(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \text{ par parité de } g \\ &= \frac{1}{2a} \times \sqrt{2a} E(Z^2) \quad \text{d'après } (*) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $E(Z^2)$ avec la formule de K.H. sachant que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a)$:

$$E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 \Rightarrow E(Z^2) = a.$$

On en déduit que :

$$E(X) = \frac{\sqrt{2a\pi}a}{2a} \Rightarrow \boxed{E(X) = \sqrt{\frac{a\pi}{2}}}.$$

5. (a) $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $E(Y) = 1$.

Par ailleurs, $Y = \frac{X^2}{2a}$ donc $X^2 = 2aY$.

Ainsi par linéarité, la variable X^2 admet une espérance et $E(X^2) = 2aE(Y)$.

Ccl : X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = 2a$.

(b) X admet un moment d'ordre 2 donc X admet une variance et d'après K.H. :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 2a - \frac{a\pi}{2} \\ &= \frac{4a - a\pi}{2} \end{aligned}$$

Ccl : On a bien : $V(X) = \frac{(4 - \pi)a}{2}$.

Exercice 3 : Un transfert pas si évident

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. (on rappelle qu'on note Φ sa fonction de répartition).

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \begin{cases} \lfloor X \rfloor & \text{si } X \geq 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$

1. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{R}$ ainsi $Y(\Omega) = \{-1\} \cup \mathbb{N}$.

2. (a) Soit $k \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lfloor X \rfloor = k) \\ &= P(k \leq X < k+1) && \text{par propriété de la partie entière} \\ &= \Phi(k+1) - \Phi(k) && \text{car } \Phi \text{ est la Frép de } X \end{aligned}$$

(b) Par définition de Y l'événement $(Y = -1)$ est réalisé SSI $(X < 0)$ est réalisé donc $P(Y = -1) = P(X < 0)$.

Φ est la Frép de X donc $\Phi(0) = P(X < 0)$ et de plus par propriété de symétrie Φ , on a $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{+\infty} P(Y = k) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(k+1) - \Phi(k) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{N \rightarrow +\infty} (\Phi(N+1) - \Phi(0)) && \text{somme télescopique} \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} && \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1 \text{ et } \Phi(0) = \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. (a) Soit $k \geq 0$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k = e^{-\frac{k}{2}}$ et de plus $k \leq k^2$ donc, par croissance de l'exponentielle on a bien : $e^{-\frac{k^2}{2}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$

(b) Soit $k \geq 0$. D'après la question 2.a) on sait que $P(Y = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

De plus $t \in [k; k+1]$ $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow -\frac{(k+1)^2}{2} \leq -\frac{t^2}{2} \leq -\frac{k^2}{2} \Rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{k^2}{2}}$.

Par croissance de l'intégrale on a donc

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} \int_k^{k+1} 1 dt$$

Or d'après la question précédente on sait que $e^{-\frac{k^2}{2}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$.

Conclusion : On a $P(Y = k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$.

(c) Montrons que Y admet une espérance (et ne la calculons pas !).

On s'intéresse donc à la convergence absolue de la série $\sum_{k \geq -1} kP(Y = k)$ (qui est à termes positifs à partir du 2ème terme).

D'après la question, précédente,

$$\forall k \geq 0 : kP(Y = k) \leq k \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} \times k \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}.$$

De plus, $\frac{1}{\sqrt{e}} \in]0; 1[$, donc la série $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}$ converge en tant que série géométrique.

Conclusion : D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq -1} kP(Y = k)$ converge.

Exercice 4 : Utilisation de la table de Φ

1. L'allure de la densité f de X est une courbe en cloche symétrique par rapport à l'axe $x = m$ avec m entre 50 et 75.

2. On pose $X^* = \frac{X - m}{\sigma}$.

(a) $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ (classique).

(b) • 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres $\Leftrightarrow P(X > 75) = 0,1$

• 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres $\Leftrightarrow P(X < 50) = 0,25$.

On sait que $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(a < X < b) = P\left(\frac{a - m}{\sigma} < X^* < \frac{b - m}{\sigma}\right)$.

Ainsi on peut retraduire les informations de la façon suivante :

• 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres $\Leftrightarrow P\left(X^* > \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(X^* < \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9$

• 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres $\Leftrightarrow P\left(X^* < \frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,25$

La fonction Φ est la Frép de X^* donc on peut à nouveau traduire les informations à l'aide de Φ :

• 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres $\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9$.

• 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres $\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,25$.

OR par symétrie $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

DONC on peut encore traduire une dernière fois les informations :

• 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres $\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9$

• 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres $\Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,75$

A l'aide de la table de la fonction Φ on trouve que

$$\Phi(1,28) \approx 0,9 \quad \text{et} \quad \Phi(0,67) \approx 0,75.$$

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} \Phi\left(\frac{75 - m}{\sigma}\right) \approx \Phi(1,28) \\ \Phi\left(-\frac{50 - m}{\sigma}\right) \approx \Phi(0,67) \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} \frac{75 - m}{\sigma} \approx 1,28 \\ \frac{50 - m}{\sigma} \approx -0,67 \end{cases}$$

car Φ est une fonction continue et strictement croissante sur \mathbb{R} donc **bijective**.

(c) Calculons m et σ en résolvant un système.

$$\begin{cases} \frac{75 - m}{\sigma} \approx 1,28 \\ \frac{50 - m}{\sigma} \approx -0,67 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} 75 - m \approx 1,28\sigma \\ 50 - m \approx -0,67\sigma \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} 25 \approx 1,95\sigma \\ 50 - m \approx -0,67\sigma \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} \sigma \approx \frac{25}{1,95} \\ m \approx 50 - \frac{-0,67 \times 25}{1,95} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} \sigma \approx 12,82 \\ m \approx 58,56 \end{cases}$$