FEUILLE D'EXERCICES

CHAÎNES DE MARKOV

EXERCICE 13.1 (Autour de la définition)**.**
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $E = \{1,2,3\}$ d'état initial $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & a \\ 1/5 & b & 1/2 \\ c & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer a, b, c et représenter le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.
2. Déterminer la loi de X_1.
3. Calculer $P\big([X_0 = 1] \cap [X_1 = 2] \cap [X_2 = 2] \cap [X_3 = 3]\big)$.

EXERCICE 13.2 (Chaîne à 3 états)**.**
On considère la matrice définie $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Montrer que M admet 3 valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs propres U_1, U_2, U_3 tels que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ U_i est un vecteur propre de M associé à λ_i.
   (c) Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer les coordonnées (α, β, γ) du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base (U_1, U_2, U_3).
2. Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :
   - si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
   - si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

   Pour tout entier $i \geqslant 1$ on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du i-ème tirage".

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n-ème tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov à 3 états (notées ici 0, 1 et 2) et on note V_n son n-ème état probabiliste.

   On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

   (a) Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne $(X_n)_n$ est associée et préciser la matrice de transition A de celui-ci. Exprimer A en fonction de M.
   (b) Justifier rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \alpha\,{}^tU_1 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n {}^tU_2 + \gamma\left(\frac{1}{3}\right)^n {}^tU_3$$

où α, β, γ sont les réels trouvés précédemment.

(d) Déterminer la loi de X_n.

3. Calculer $E(X_n)$ puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Reconnaître la loi de T_1.

5. Ecrire les événements $(T_2 = 2)$ et $T_2 = 3)$ à l'aide de certains événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $P(T_2 = 2)$ et $P(T_2 = 3)$.

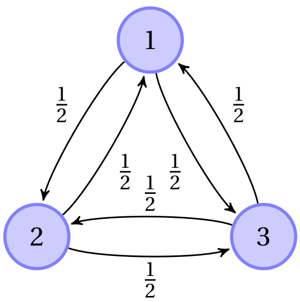
6. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, écrire l'événement $(T_2 = n)$ en fonctions des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 0)$.

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(T_2 = n) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

   (c) Montrer que la variable T_2 admet une espérance et la calculer.

EXERCICE 13.3 (Déplacement d'une particule sur les sommets d'un triangle)**.**
Une particule se déplace sur les sommets d'un triangle ABC de sorte qu'à chaque instant la particule saute du sommet sur lequel elle se trouve sur l'un des deux sommets restants libres de façon équiprobable.
A l'instant initial on suppose que la particule se trouve sur le sommet A.
On décide de coder A par 1, B par 2 et C par 3 et, pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire correspondant au numéro du sommet sur lequel se situe la particule à l'instant k.
Le graphe associé est donc :



Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note V_k, le k-ème état probabiliste de la chaîne.

1. Déterminer V_0.

2. (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_{k+1} = V_k A$.

   (b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k = V_0 A^k$.

3. (a) Montrer que : $Sp(A) = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$

   (b) En déduire l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. *On choisira D de sorte que les coefficients diagonaux soient rangés dans l'ordre croissant.*

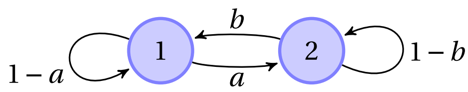
   (c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

4. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression du k-ème état probabiliste de la chaîne puis la loi de X_k.

5. Déterminer les limites $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} P(X_k = 1)$, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} P(X_k = 2)$, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} P(X_k = 3)$ et interpréter les résultats dans le contexte probabiliste de l'exercice.

EXERCICE 13.4 (Une chaîne à 2 états à paramètres)**.**
Soit $(a, b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On considère une chaîne de Markov à deux états dont le graphe probabiliste associé est :



1. Déterminer la matrice de transition A associée.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b + a\gamma^k & a - a\gamma^k \\ b - b\gamma^k & a + b\gamma^k \end{pmatrix}$ où $\gamma = 1 - (a+b)$.
2. On suppose que l'état initial est $V_0 = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ avec $p \in [0,1]$.
   Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, l'état probabiliste à l'instant k est donné par $V_k = \begin{pmatrix} \frac{b+\mu\gamma^k}{a+b} & \frac{a-\mu\gamma^k}{a+b} \end{pmatrix}$ où $\mu = pa - (1-p)b$.
3. En déduire la limite des états lorsque k tend vers $+\infty$. Que constate-t-on ?

EXERCICE 13.5 (Urnes d'Ehrenfest)**.**
On considère deux urnes A et B et N boules. Initialement, les N boules sont dans l'urne A (et donc l'urne B est vide). À chaque instant, on choisit une boule au hasard et on la change d'urne.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de boules dans l'urne A à la n-ième étape.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et expliquer pourquoi on peut associer à cette expérience aléatoire une chaîne de Markov définie sur l'ensemble $[\![1, N+1]\!]$.
2. *Étude du cas* $N = 2$.
   (a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
   (b) Déterminer la matrice de transition M : quelles sont ses valeurs propres ?
   (c) Déterminer les états stables de cette chaîne de Markov.
   (d) Déterminer l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire le n-ième état de cette chaîne de Markov : que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?
3. *Retour au cas général.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X_{n+1} = i)$ en fonction de $P(X_n = i-1)$ et $P(X_n = i+1)$, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$.
   (b) En déduire que $E(X_{n+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{N}\right) E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer $E(X_n)$ ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
4. *Bonus.*
   (a) Écrire la matrice de transition M.
   (b) Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{N+1} \end{pmatrix}$ vérifie $XM = M$ ssi pour tout $k \in [\![1, N+1]\!]$ on a $\dfrac{N+2-k}{N} x_{k-1} + \dfrac{k}{N} x_{k+1} = x_k$, où on a posé $x_0 = x_{N+2} = 0$.
   (c) Montrer par récurrence que si $XM = M$, alors pour tout $k \in [\![1, N+1]\!]$ on a : $x_k = \dbinom{N}{k-1} x_1$.
   (d) En déduire les états stables de cette chaîne de Markov (on reconnaîtra une loi usuelle).