FEUILLE D'EXERCICES

RÉDUCTION DES MATRICES CARRÉES

EXERCICE 8.1. Vecteurs propres / valeurs propres

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $U_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Montrer que U_1, U_2, U_3 sont des vecteurs propres de A et préciser à quelle valeur propre ils sont associés.

EXERCICE 8.2. Valeurs propres/ sous-espaces propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer une base du son sous-espace propre associé.
2. Vérifier que -1 n'est pas valeur propre de A.

EXERCICE 8.3. Valeurs propres évidentes

Ces matrices ont une ou plusieurs valeurs propres "évidentes". Lesquelles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8.4. Polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $(A - I)^3 = 0$ puis donner un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer le spectre de A.
3. Déterminer une base de chacun du ou des sous-espaces propres de A.

EXERCICE 8.5. Polynôme annulateur bis

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^4 = I_4$ et en déduire un polynôme annulateur de A.
2. En déduire $Sp(A)$.
3. Déterminer une base des sous-espaces propres $E_1(A)$ et $E_{-1}(A)$.

EXERCICE 8.6. Diagonalisation simple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que 0, 1 et 2 sont des valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$
4. Le couple (D, P) est-il unique ?

EXERCICE 8.7. Diagonalisations

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer le spectre de A.
   (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
   (c) En déduire l'existence d'une matrice inversible P de première ligne $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $rg(B - \lambda I) < 3$ puis en déduire le spectre de B.
   (b) Montrer que B est diagonalisable et la diagonaliser.

EXERCICE 8.8. Cas des matrices 2×2

Les questions sont indépendantes :

1. Après l'avoir diagonalisée, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Diagonaliser B.
   (b) Déterminer une matrice A telle que $A^3 = B$.

EXERCICE 8.9. Matrices Attila

On considère la matrice J_n, matrice Attila d'ordre n avec $n \geqslant 1$ définie par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. On suppose $n = 4$. On a donc $J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Etudier l'inversibilité de J_4 puis en déduire une valeur propre.

   (b) En calculant la somme des lignes de la matrice J_4 déterminer une deuxième valeur propre.

   (c) Déterminer une base des sous-espaces propres de J_4 associés aux deux valeurs propres trouvées précédemment.

   (d) En déduire l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $J_4 = PDP^{-1}$ (on explicitera les matrice P et D).

2. On revient au cas général avec $n \geqslant 1$.

   (a) Déterminer J_n^2 puis en déduire le spectre de J_n.

   (b) Déterminer le rang de J_n puis en déduire la dimension des sous-espaces propres associés (on ne demande pas de fournir une base).

   (c) En déduire que J_n est diagonalisable.

EXERCICE 8.10. Diagonalisation simultanée

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que J est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{B} = (C_1, C_2, C_3)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J.
2. On considère une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on suppose qu'elle vérifie l'égalité $M^2 = J$.

   (a) Montrer que M et J commutent.

   (b) En déduire que C_1, C_2 et C_3 sont des vecteurs propres de M.

   (c) Montrer alors que M est diagonalisable.
3. Existe-t-il une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = J$? Si oui, on expliquera comment trouver une telle matrice.

EXERCICE 8.11. Suites imbriquées

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs termes initiaux u_0, v_0, w_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - w_n \\ v_{n+1} &= v_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n \end{cases}.$$

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ puis en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.
2. (a) A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.
   (b) Montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de A puis en déduire que A est diagonalisable.
   (c) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
   (d) En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, explicitement la matrice A^n puis en déduire le terme général, en fonction de n et des termes initiaux u_0, v_0, w_0, de chacune de ces trois suites.

EXERCICE 8.12. Extrait EML 2019

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter la matrice D^{-1}.
3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z)$. On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$, de matrices U_1 et U_2 (respectivement) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6. (a) Vérifier que 1 est valeur propre de M et que (U_1, U_2) est une base du sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$. On notera U_3 sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.
   (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable?

10. (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)\left(I_3 - N + N^2\right)$.
    (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
    (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
    (b) Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
    (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.
    (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.