

RÉDUCTION DES MATRICES CARRÉES

CORRECTIONS

Exercice 1 :**Corrigé en classe.****Exercice 2 :**

1. $1 \in Sp(A)$ si et seulement si $rg(A - I_3) < 3$.

$$rg(A - I_3) = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

Donc $1 \in Sp(A)$.Calculons $E_1(A) = Ker(A - I_3)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in Ker(A - I_3) \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. Pour montrer que -1 n'est pas valeur propre de A on étudie $rg(A + I_3)$:

$$rg(A + I_3) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

Ceci montre que $A + I_3$ est inversible et donc $-1 \notin Sp(A)$.

Exercice 3 :

$Sp(A) = \{-3, 1, 2\}$ car A est diagonale.

$Sp(B) = \{-2, 3, 5\}$ car B est triangulaire.

$Sp(C) = \{0\}$ car C est triangulaire.

D est non-inversible car elle possède une ligne nulle $\Rightarrow 0$ est valeur propre de D .

$E - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow E$ est non-inversible (une colonne nulle) $\Rightarrow 1$ est valeur propre de E .

Exercice 4 :

Corrigé en classe.

Exercice 5 :

1. Par simple calculs matriciels $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = I_4$.

On en déduit immédiatement que $A^4 - I_4 = 0_4$ et donc le polynôme $Q(x) = x^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A .

2. Déterminons les racines de Q :

$$Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Le polynôme $x^2 + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} on en déduit que les racines de Q sont $\{-1; 1\}$.

D'après le cours on a immédiatement $Sp(A) \subset \{-1; 1\}$

Rmq : il est crucial de ne pas écrire tout de suite que une égalité et bien une inclusion.

• Montrons que $1 \in Sp(A)$:

$$rg(A - I_4) = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 < 4.$$

Donc on a bien $1 \in Sp(A)$.

• Montrons que $-1 \in Sp(A)$:

$$rg(A + I_4) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 < 4.$$

Donc on a bien $-1 \in Sp(A)$.

Ccl: $Sp(A) = \{-1; 1\}$

3. Déterminons les sous-espaces propres associés :

• $E_1(A) = Ker(A - I_4)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$X \in \text{Ker}(A - I_4) \iff (A - I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

• $E_{-1}(A) = \text{Ker}(A + I_4)$:

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

$$X \in \text{Ker}(A + I_4) \iff (A + I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Rmq : la résolution du système associé au calcul de chaque sous-espace propre peut être facilité par le travail fait sur le rang. En effet, on peut utiliser directement le système associé à la dernière matrice utilisée puisque les opérations d'une résolution de système sont identiques aux opérations du calcul du rang : il s'agit dans les deux cas de la méthode du pivot.

Par ailleurs d'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = n - \text{rg}(A - \lambda I)$

Une fois le calcul du rang effectué, permettant d'affirmer que λ est une valeur propre, on sait donc à l'avance la dimension du sous-espace propre avant même de l'avoir calculé.

Cela peut s'avérer utile lors de la détermination du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ et de la résolution du système associé, notamment pour connaître le nombre d'inconnues auxiliaires du système.

Exercice 6 :

1. • Montrons que $0 \in \text{Sp}(A)$ et déterminons $E_0(A) = \text{Ker}(A)$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3 \Rightarrow 0 \in \text{Sp}(A).$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0 \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

• Montrons que $1 \in \text{Sp}(A)$ et déterminons $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$:

$$\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3 \Rightarrow 1 \in \text{Sp}(A).$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$X \in E_1(A) \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

• Montrons que $2 \in Sp(A)$ et déterminons $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3)$:

$$\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3 \Rightarrow 2 \in Sp(A).$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$X \in E_2(A) \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. D'après le principe de concaténation, la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre de trois vecteurs $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent \mathcal{B} est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Ccl. : la matrice A est diagonalisable.

3. Notons $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• P est inversible comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base \mathcal{B} formée des vecteurs propres de A .

• D est évidemment diagonale.

De plus, d'après le cours nous avons la relation $A = PDP^{-1}$.

4. Le couple (D, P) n'est pas du tout unique.

• choix sur D : on peut changer l'ordre des valeurs propres sur la diagonale. Attention cependant alors à changer également l'ordre des colonnes de P de façon cohérente.

• choix sur P : on peut changer les colonnes de P par des vecteurs colinéaires. Par exemple si on souhaite que la première ligne de P soit $(1 \ 1 \ 1)$ alors vu que

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{la matrice } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ conviendrait parfaitement avec le même choix pour } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 : Corrigé en classe.

Exercice 8 :

1. **Corrigé en classe.**

2. (a) Déterminons $Sp(B)$:

$$\lambda \in Sp(B) \iff B - \lambda I_2 \text{ non inversible} \iff (-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 18 = 0 \iff \lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 8) = 0$$

Par conséquent $Sp(B) = \{-8; 1\}$.

Déterminons les sous-espaces propres de B :

• $E_{-8}(B) = Ker(B + 8I_2)$ et $B + 8I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a $X \in E_{-8}(B) \iff x + y = 0$ et donc $E_{-8}(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

• $E_1(B) = Ker(B - I_2)$ et $B - I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a $X \in E_1(B) \iff -2x + y = 0 \iff y = 2x$ et donc $E_1(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Montrons que B est diagonalisable :

D'après le principe de concaténation, la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (ce que l'on aurait pu également directement voir puisque les vecteurs sont clairement non colinéaires).

Par conséquent \mathcal{B} est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B .

\Rightarrow $\boxed{\text{la matrice } B \text{ est diagonalisable.}}$

Diagonalisons B :

On note $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

P est inversible comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à \mathcal{B} et D est diagonale.

De plus, d'après le cours on a la relation : $\boxed{B = PDP^{-1}}$.

(b) • Procédons par analyse du problème : Supposons qu'une telle A matrice existe.

On a alors

$$A^3 = B \iff A^3 = PDP^{-1} \iff P^{-1}A^3P = D \iff (P^{-1}AP)^3 = D.$$

Ccl : Si une telle matrice A existe alors la matrice $D' = P^{-1}AP$ vérifie $(D')^3 = D$.

• Passons maintenant à la synthèse du problème : on cherche donc une matrice D' telle que $(D')^3 = D$.

Vu la forme diagonale de D on cherche D' sous forme diagonale également.

En posant $D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ il vient immédiatement $(D')^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent la matrice $A = P^{-1}D'P$ répond à la question et il ne nous reste plus qu'à effectuer les

calculs matriciels avec $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A = P^{-1}D'P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ccl : En posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ on a bien $A^3 = B$.

Exercice 9 : On considère la matrice J_n , matrice Attila d'ordre n avec $n \geq 1$ définie par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. On suppose $n = 4$. On a donc $J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On a évidemment $rg(J_4) = rg(C_1) = 1$ donc J_4 n'est pas inversible et donc $0 \in Sp(J_4)$.

(b) La somme des lignes de la matrice J_4 vaut 4 on a donc $J_4 U = 4U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi U est un vecteur

propre associé à la valeur propre $\lambda = 4$.

(c) • Déterminons $E_0(J_4) = Ker(J_4)$:

$$X \in Ker(J_4) \iff J_4 X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x = -y - z - t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_0(J_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

• Déterminons $E_4(J_4) = Ker(J_4 - 4I_4)$:

$$X \in Ker(J_4 - 4I_4) \iff (J_4 - 4I_4)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuons le pivot de Gauss sur la matrice $J_4 - 4I_4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -3x + y + z + t = 0 \\ -2y + z + t = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

$$\Rightarrow E_4(J_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(d) D'après le lemme de concaténation, on en déduit l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $J_4 = PDP^{-1}$ (on explicitera les matrices P et D).

2. On revient au cas général avec $n \geq 1$.

- (a) Déterminer J_n^2 puis en déduire le spectre de J_n .
- (b) Déterminer le rang de J_n puis en déduire la dimension des sous-espaces propres associés (on ne demande pas de fournir une base).
- (c) En déduire que J_n est diagonalisable.

Exercice 10 :

1. Déterminons $Sp(J)$:

- la matrice J est visiblement non-inversible (une colonne nulle) $\Rightarrow 0 \in Sp(J)$.

Déterminons le sous-espace propre associé $E_0(J) = Ker(J)$:

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } X \in E_0(J) \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ccl: } E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- Pour les autres valeurs propres procédons par caractérisation $\lambda \in Sp(J) \iff rg(J - \lambda I_3) < 3$ avec $\lambda \neq 0$.

$$rg(J - \lambda I_3) = rg \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2 - \lambda(1 + \lambda) \end{pmatrix}.$$

Avec $\lambda \neq 0$ on a donc $rg(J - \lambda I_3) < 3 \iff 2 - \lambda - \lambda^2 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$.

Ccl: $\{-2; 1\} \subset Sp(J)$ et donc finalement $Sp(J) = \{-2; 0; 1\}$ puisque J ne peut pas avoir plus que 3 valeurs propres distinctes.

Déterminons les sous-espace propre associés $E_{-2}(J) = Ker(J + 2I_3)$ et $E_1(J) = Ker(J - I_3)$:

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } X \in E_{-2}(J) = Ker(J + 2I_3) \iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow E_{-2}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{On a } X \in E_1(J) = Ker(J - I_3) \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow E_1(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Ccl: } E_{-2}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right), E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E_1(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Montrons que J est diagonalisable :

$$\text{On note } (C_1, C_2, C_3) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Par principe de concaténation la famille $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J .

Ccl: la matrice J est diagonalisable.

2. (a) Montrons que M et J commutent :

$$MJ = M \times M^2 = M^3 = M^2 \times M = JM.$$

(b) Nous allons nous servir du fait que M et J commutent et que les sous-espaces propres de J sont tous de dimension 1.

On note $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 1$.

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrons que C_i est un vecteur propre de M : c'ad $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ tq. $MC_i = \alpha_i C_i$

En remarquant $E_{\lambda_i}(J) = \text{Vect}(C_i)$ cela revient à démontrer que $MC_i \in E_{\lambda_i}(J)$.

Or M et J commutent donc :

$$J(MC_i) = (JM)C_i = (MJ)C_i = M(JC_i) = M(\lambda_i C_i) = \lambda_i(MC_i).$$

Ceci démontre que $MC_i \in E_{\lambda_i}(J)$ et donc $MC_i \in \text{Vect}(C_i)$ et enfin que : $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, MC_i = \alpha_i C_i$.

Ccl : (C_1, C_2, C_3) sont des vecteurs propres de M .

Rmq : on ne sait pas quelles sont les valeurs propres, on ne sait d'ailleurs même pas si une telle matrice M existe, on ne fait que supposer qu'elle existe.

(c) D'après ce qui précède M est diagonalisable puisque (C_1, C_2, C_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .

3. Comme dans l'Exercice 8 question 2. si une telle matrice M existe alors soit P une matrice inversible et D diagonale toutes deux issues de la diagonalisation de J .

La relation $M^2 = J$ donnerait $M^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}M^2P = D$ et donc $(P^{-1}MP)^2 = D$.

Or une matrice diagonale convenable pour D et donnée par $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche donc une matrice D' diagonale telle que $(D')^2 = D$.

Or si on pose $D' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, on aurait alors :

$$(D')^2 = D \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 = -2 \\ b^2 = 0 \\ c^2 = 1 \end{cases}.$$

Ce qui est impossible puisque $a^2 = -2$ n'admet aucune solution réelle.

Ccl : Il n'existe pas de matrice M telle que $M^2 = J$.