

SUITES RÉCURRENTES ET IMPLICITES

CORRECTION

Suites récurrentes

Soit f définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} (et même de classe C^∞) comme quotient (bien défini car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 0$) de la fonction exp et de la fonction $x \mapsto e^x + 1$ qui sont toutes les deux dérivables (et même de classe C^∞) sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

La fonction exp étant strictement positive sur \mathbb{R} on en déduit que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. (a) La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est dérivable sur \mathbb{R} par différence de la fonction f et de la fonction $x \mapsto x$ (polynomiale).

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-(e^{2x} + e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} < 0$.

La fonction exp étant strictement positive sur \mathbb{R} on en déduit que g est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Par ailleurs,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} - x = +\infty. \end{cases}$$

Par conséquent g est une fonction continue strictement décroissante sur \mathbb{R} , donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\gamma \in \mathbb{R}$.

Bien sûr, $g(x) = 0$ équivaut à $f(x) = x$.

Ccl : $\boxed{\gamma \in \mathbb{R} \text{ est l'unique solution de l'équation } f(x) = x}$.

- (b) On a $g(0) = \frac{1}{2} > 0$, $g(\gamma) = 0$ et $g(1) = -\frac{1}{e+1} < 0$ donc on a l'encadrement $g(1) < g(\gamma) < g(0)$. De plus, on sait que g

est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Par conséquent on a bien $\boxed{0 < \gamma < 1}$.

g est décroissante sur \mathbb{R} et s'annule en γ donc on en déduit le signe de g sur \mathbb{R} :

. sur $]-\infty, \gamma[$, g est strictement positive,

. $g(\gamma) = 0$ et

. sur $]\gamma, +\infty[$, g est strictement négative.

3. Soit u la suite définie par son premier terme u_0 appartenant à \mathbb{R} et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Supposons que u converge et notons $L \in \mathbb{R}$ sa limite. f étant continue sur \mathbb{R} , par passage à la limite de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$L = f(L) \quad \text{on dit que } L \text{ est un point fixe de } f.$$

En effet, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$ et par continuité de f on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(L)$.

Par conséquent, d'après la question 2.(a) on a : $L = \gamma$.

Ccl : $\boxed{u \text{ converge vers } \gamma}$.

(b) Montrons que les intervalles $]-\infty, \gamma]$ et $[\gamma, +\infty[$ sont stables par f .

Par croissance de f sur \mathbb{R} on a : $x < \gamma \Rightarrow f(x) < f(\gamma)$. Or $f(\gamma) = \gamma$ donc $x < \gamma \Rightarrow f(x) < \gamma$.

Ceci montre que $f(]-\infty, \gamma]) \subset]-\infty, \gamma]$ donc que l'intervalle $]-\infty, \gamma]$ est stable par f .

De la même manière on montre que l'intervalle $[\gamma, +\infty[$ est stable par f .

4. On suppose $u_0 \geq \gamma$ et on note $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : u_n \geq \gamma$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a donc par hypothèse de récurrence que $u_n \geq \gamma$.

Or f est croissante sur \mathbb{R} donc $u_n \geq \gamma \Rightarrow f(u_n) \geq \gamma$, soit $u_{n+1} \geq \gamma$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \gamma$.

• Etudions la monotonie de u .

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$$

puisque $u_n \geq \gamma$ et que d'après la question 2.(a), sur l'intervalle $[\gamma, +\infty[$, g est négative.

Ccl : u est une suite décroissante.

• D'après ce qui précède, la suite u est décroissante et minorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite u converge et d'après la question 3.(a) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$.

5. On suppose $u_0 \leq \gamma$ et on note $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : u_n \leq \gamma$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a donc par hypothèse de récurrence que $u_n \leq \gamma$.

Or f est croissante sur \mathbb{R} donc $u_n \leq \gamma \Rightarrow f(u_n) \leq \gamma$, soit $u_{n+1} \leq \gamma$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \gamma$.

• Etudions la monotonie de u .

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$$

puisque $u_n \leq \gamma$ et que d'après la question 2.(a), sur l'intervalle $]-\infty, \gamma[$, g est positive.

Ceci montre que u est une suite croissante.

• D'après ce qui précède, la suite u est croissante et majorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite u converge et d'après la question 3.(a) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$.

EXERCICE 1.1 (Ecricome 2013).

Corrigé en cours.

EXERCICE 1.2.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

1. **Étude de f**

(a) Sur \mathbb{R}^* : La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* par composition de fonctions elles mêmes continues.

En 0 : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (par composition de limites) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ et donc f est continue en 0.

Conclusion : f étant continue sur \mathbb{R}^* et en 0, elle est donc continue partout sur \mathbb{R} .

(b) Montrons que f est dérivable en 0 à l'aide du taux d'accroissement de f en 0.

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{e^{-X}}{\frac{1}{\sqrt{X}}} = X^{-\frac{1}{2}} e^{-X} = \frac{X^{-\frac{1}{2}}}{e^X}.$$

Or on a $X \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ et par croissances comparées $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^{-\frac{1}{2}}}{e^X} = 0$ donc par composition de limite on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et de plus $f(0) = 0$.

(c) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* par composition de fonctions elles-mêmes dérivables et de plus pour tout $x \neq 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Conclusion : d'après les fonctions précédentes la fonction f' est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrons que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que f est dérivable sur \mathbb{R} et f' est continue sur \mathbb{R} .

- f est dérivable sur \mathbb{R}^* et en 0, donc elle est dérivable partout sur \mathbb{R} .
- f' est continue sur \mathbb{R}^* par théorèmes généraux et de plus par croissances comparées :

$$\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 2 \frac{X^{\frac{3}{2}}}{e^X} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0).$$

Ceci montre que f' est continue en 0; étant continue sur \mathbb{R}^* , f' est donc continue sur \mathbb{R} .

Conclusion : les points précédents montrent bien que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

(d) D'après les questions précédentes on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} > 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Par ailleurs, $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^X = 1 \end{cases}$ et donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Étant également continue sur \mathbb{R}_+ elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+ sur $[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; 1[$.

(e) On peut remarquer que f est une fonction paire puisque

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, f(-x) = e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x).$$

Par conséquent, par parité on obtient directement :

- f est décroissante sur \mathbb{R}_- ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

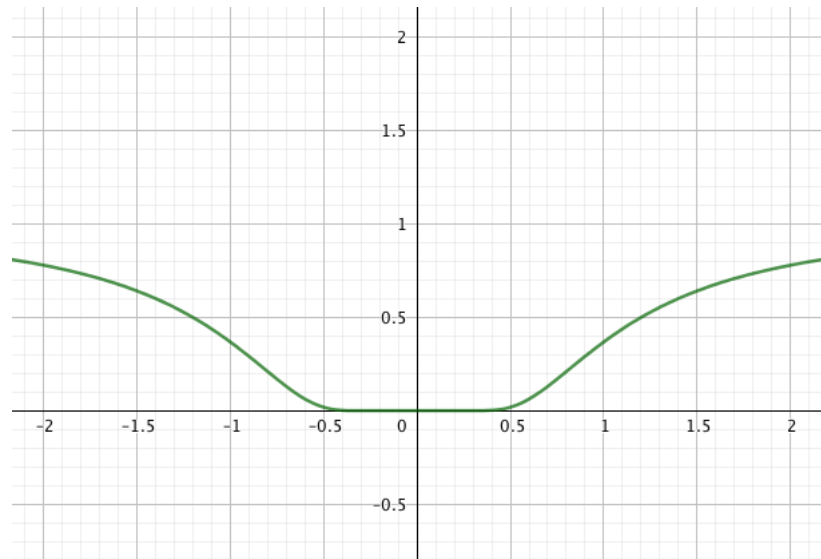
Et on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
variations de f	$+\infty$	0	$+\infty$

Équation de la tangente

Si f est dérivable en x_0 alors la courbe représentative de f admet une tangente ayant pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

L'équation de la tangente T_0 à la courbe de f en 0 est donc $y = 0$ puisque $f(0) = f'(0) = 0$.
D'où l'allure de la courbe :



2. Étude de $f(x) - x$.

Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

(a) La fonction $g : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} - x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; 1[$ par théorèmes généraux, de plus pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$g'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{-6x^2 + 4}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(b) On en déduit, par positivité de x^3 et de l'exponentielle, que $g''(x)$ est du signe de $-6x^2 + 4$ s'annulant une seule fois sur $[0; 1]$ en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Remarquons que :

- $g'(\sqrt{\frac{2}{3}}) = f(\sqrt{\frac{2}{3}}) - 1 \approx 0,82 - 1 < 0$
- $g(0) = f(0) - 0 = 0$.

D'où :

x	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
signe de $g''(x)$	+	0	-
variations de g'	$g'(\sqrt{\frac{2}{3}}) < 0$		
signe de g'	-		
variation de g	0		
signe de g	-		

3. Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Fonction Python d'en-tête `def suite(n)` : qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n .

```

1 import numpy as np
2 def suite_u(n):
3     u=1/3 # initialisation : premier terme de la suite
4     for k in range(1, n+1):
5         u=np.exp(-1/x**2)
6     return u

```

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0; 1[$:

Initialisation : La propriété est trivialement vraie au rang $n = 0$ puisque $u_0 = \frac{1}{3}$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$.

On a donc par hypothèse de récurrence que $u_n \in]0; 1[$.

Or f est strictement croissante sur $]0; 1[$ donc $0 < u_n < 1 \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(1)$, soit $0 < u_{n+1} < e^{-1} < 1$.

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0 \quad u_n \in]0; 1[\text{ et que } g \text{ est strictement négative sur }]0; 1[$$

Conclusion : On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0), d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$).

Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, la limite $\ell \in [0; 1]$ vérifie l'équation du point fixe $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow g(\ell) = 0$.

Or d'après les études précédentes, $\ell = 0$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et de plus $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

Suites récurrentes et IAF

EXERCICE 1.3 (Exercice de référence).

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. f est une fonction de classe C^∞ donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* par différence de $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ de deux fonctions elles-mêmes de classe C^∞ .

. On a $f'(x) = \frac{x-1}{x}$ avec $x > 0$ et $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

. $f(1) = 1$.

. $f(x) = x - \ln(x)$ et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ par différence.

. $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées

Ainsi $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

. Tableau de variations complet :

x	0	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0
variations de f	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$

Rappel : convexité

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition de la convexité :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall (a, b) \in I^2, \quad \forall \lambda \in]0; 1[, \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Fonctions concaves :

$$f \text{ est concave sur } I \iff -f \text{ est convexe sur } I.$$

Caractérisation pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 :

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , alors f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur I .

Caractérisation pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2 :

Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur I , alors f est convexe sur $I \iff \forall x \in I, \quad f''(x) > 0$.

Inégalité de convexité :

Si f est dérivable et convexe sur I alors la courbe de f est en dessous de toutes ses tangentes.

Exemple d'application : Montrer que $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$

2. f est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* car on a vu que f était de classe C^∞ sur cet intervalle.

On a $f''(x) = \frac{1}{x^2}$

Ccl : On a $f'' > 0$ sur \mathbb{R}_+^* donc f est convexe sur cet intervalle.

3. On a vu que $f'' > 0$ sur \mathbb{R}_+^* donc f' est croissante sur cet intervalle.

$$1 \leq x \leq 2 \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \text{par croissance de } f' \end{matrix} \quad f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2).$$

Or $f'(1) = 0$ et $f'(2) = \frac{1}{2}$ donc on a bien : $\forall x \in [1, 2], \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n \in [1, 2]$ est vraie.

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{array}{l} \text{Par hypothèse de récurrence :} \\ \text{Par croissance de } f \text{ sur } [1; +\infty[: \\ f(1) = 1, u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } f(2) = 1 - \underbrace{\ln(2)}_{\in]0, 1[} < 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \leq u_n \leq 2 \\ \Downarrow \\ f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \\ \Downarrow \\ 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [1, 2]$.

Rappel : Inégalité des accroissements finis (IAF)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$.

Théorème (IAF) :

$$\forall x, y \in [a; b], \quad |f(x) - f(y)| \leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| |x - y|.$$

(b) f est une fonction de classe C^∞ sur $[1, 2]$ et d'après la question 3. $\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) on a

$$\forall a, b \in [1, 2], \quad |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on sait de plus, d'après la question 4. a) que $u_n \in [1, 2]$.

Ainsi en choisissant $a = 1$ et $b = u_n$, on obtient :

$$|f(u_n) - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1| \quad \Rightarrow \quad \left| \underbrace{u_{n+1} - 1}_{\geq 0} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \underbrace{u_n - 1}_{\geq 0} \right| \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} (u_n - 1).$$

Ccl : n étant arbitraire on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} (u_n - 1)$.

(c) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est vraie.

Initialisation : $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On suppose donc que $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'après la question 4.b) : } \quad 0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \text{Par hypothèse de récurrence : } \quad u_n - 1 \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \downarrow \\ u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) D'après les questions précédentes on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Or } -1 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des GENDARMES $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$.

$$\text{Ccl : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

EXERCICE 1.4. (D'après ECRICOME 2007)

Corrigé en classe.

Suites implicites

EXERCICE 1.5 (Exercice de référence).

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. f_n est une fonction polynomiale donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = 5x^4 + n \geq 0 \text{ puisque } x^4 \geq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ccl : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) \geq 0 \text{ et } f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

2. Déterminons les limites de f_n aux bornes de son intervalle de définition en remarquant que f_n est une fonction polynomiale on a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^5 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty}.$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'_n(x)$	+	
variations de f_n	$-\infty$	$+\infty$

La fonction f_n est continue (car \mathcal{C}^∞) et strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . $0 \in \mathbb{R}$ (=intervalle image) donc, d'après le corollaire du théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée $u_n \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ccl : } \boxed{\forall n \geq 1, \text{ il existe un unique réel } u_n \text{ tel que } f_n(u_n) = 0.}$$

3. Remarquons que pour $n \geq 1$ on a : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^5 \Rightarrow \boxed{f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0}$.

De plus, par définition u_n on a $f_n(u_n) = 0$. Par conséquent on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > f_n(u_n)$ et par croissance de f_n on en déduit $\frac{1}{n} > u_n$.

Ccl: $\boxed{\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{1}{n}}$.

Montrons que : $\forall n \geq 1, 0 < u_n$.

Remarquons que $f_n(0) = -1 < 0$, donc $f_n(0) < f_n(u_n)$ et par croissance de f_n on en déduit que $\boxed{0 < u_n}$.

En conclusion nous avons l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, 0 < u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème d'encadrement des limites.

Ccl: $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

4. Remarquons que $u_n \sim \frac{1}{n} \iff nu_n \rightarrow 1$.

Remarquons également que par définition de u_n on a :

$$f_n(u_n) = 0 \iff u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \iff nu_n = 1 - u_n^5.$$

Or on sait que $u_n \rightarrow 0$ donc $u_n^5 \rightarrow 0$ et par conséquent $1 - u_n^5 \rightarrow 1$.

Ccl: $\boxed{nu_n \rightarrow 1}$.

5. **khûbes** Déterminons un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$.

Partons à nouveau de la relation définissant u_n :

$$f_n(u_n) = 0 \iff u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \iff \frac{u_n^5}{n} + u_n - \frac{1}{n} = 0 \iff \frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n}.$$

Or on a vu que $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n^5 \sim \frac{1}{n^5}$ et donc $\frac{u_n^5}{n} \sim \frac{1}{n^6}$.

Ccl: $\boxed{\frac{1}{n} - u_n \sim \frac{1}{n^6}}$.

EXERCICE 1.6. (D'après Oral HEC 2019)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) La f_n est une fonction polynomiale sur \mathbb{R}_+ . Elle est donc dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}).

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} : f_n'(x) = (2n+1)x^{2n} - (n+1)x^n \Rightarrow \boxed{f_n'(x) = x^n((2n+1)x^n - (n+1))}$.

On en déduit donc que, pour $x \geq 0$:

$$f_n'(x) \geq 0 \iff (2n+1)x^n - (n+1) \geq 0 \iff x^n \geq \frac{n+1}{2n+1} > 0 \iff x \geq \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

En notant $m_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

De plus,

$$f_n(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	m_n	$+\infty$
signe de $f'_n(x)$		-	+
variations de f_n	-1	$f_n(m_n)$	$+\infty$

En remarquant que $m_n \in]0; 1[$ on en déduit que m_n^{2n+1}

- (b) Montrer que f_n s'annule sur \mathbb{R}_+ en un unique réel x_n et montrer que $x_n > 1$.
2. En cherchant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) décroît.
3. Montrer que (x_n) converge vers 1.
4. (a) Montrer que $h : x \mapsto x(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = x_n^n$. En exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(u_n)$ en fonction de x_n , montrer que (u_n) converge vers $(1 + \sqrt{5})/2$.
- (c) **(khûbes)** Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.