Chapitre1

FEUILLE D'EXERCICES

SUITES RÉCURRENTES ET IMPLICITES

Suites récurrentes

EXERCICE 1.1 (Exercice de référence)**.**
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

1. Etudier les variations de la fonction f. Soit $g(x) = f(x) - x$.
2. (a) Etudier les variations de g. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée γ.
   (b) Montrer que $0 < \gamma < 1$. Quel est le signe de g sur $\mathbb{R}$?
3. Soit u la suite définie par son premier terme u_0 appartenant à $\mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que si u converge alors sa limite est γ.
   (b) Montrer que les intervalles $]-\infty, \gamma]$ et $[\gamma, +\infty[$ sont stables par f.
4. On suppose $u_0 \geqslant \gamma$.
   Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \gamma$ puis étudier la monotonie de la suite u. Montrer que la suite u est convergente.
5. Par une méthode analogue à la question 4, étudier le cas $u_0 \leqslant \gamma$.

EXERCICE 1.2 (Ecricome 2013)**.**
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x}$.

1. *Étude des zéros de φ.*
   (a) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   (b) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Étudier les variations de φ, ainsi que la convexité de φ sur $\mathbb{R}_*^+$.
   (d) Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, et justifier que $\alpha \in \left]1, \exp\right[$.
2. *Étude d'une suite réelle.* On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = \exp$ et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$.
   (a) Montrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.
   (b) Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?
   (c) Montrer que u est strictement croissante : est-elle convergente ?

EXERCICE 1.3.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

1. **Étude de f**
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
   (c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$ et justifier que f est finalement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$sur un ensemble à déterminer.

(e) Achever l'étude des variations de f, dresser son tableau de variations, construire sa courbe représentative ainsi que la tangente à cette courbe à l'origine.

2. **Étude de $f(x) - x$.**

   Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

   (a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;1[$ puis y calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

   (b) Déterminer le signe de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$ sur $[0,1]$. (On donne $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0,82$.)

3. **Étude d'une suite**

   Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n):` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0;1[$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

Suites récurrentes et IAF

EXERCICE 1.4 (Exercice de référene)**.**
Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f en indiquant les limites aux bornes.

2. Etudier la convexité de f.

3. Etablir, pour tout $x \in [1,2]$, l'inégalité $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 1.5. (D'après ECRICOME 2007)
Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1. Dresser le tableau de variation de f_a.

2. En déduire que : $\forall t > 0, \quad f_a(t) \geqslant a$.

3. Démontrer que $\forall t > a, \quad 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$

4. Montrer que pour tout entier n, non nul : $u_n \geqslant a$.

5. Prouver que pour tout entier n non nul :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a).$$

6. En déduire que

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

7. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et indiquer sa limite.

8. En utilisant ce qui précède, écrire un programme permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1 , convergeant vers $\sqrt{2}$.

Suites implicites

EXERCICE 1.6 (Exercice de référence)**.**
On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que, pour tout entier non nul n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nu_n = 1$.
5. **(khûbes)** Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{n} - u_n$.

EXERCICE 1.7. (D'après Oral HEC 2019)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f_n s'annule sur $\mathbb{R}_+$en un unique réel x_n et montrer que $x_n > 1$.
2. En cherchant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) décroît.
3. Montrer que (x_n) converge vers 1.
4. (a) Montrer que $h : x \mapsto x(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = x_n^n$. En exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, h(u_n)$ en fonction de x_n, montrer que (u_n) converge vers $(1+\sqrt{5})/2$.
   (c) **(khûbes)** Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.