Chapitre1

FEUILLE D'EXERCICES

SUITES ET SÉRIES

Négligeabilité, équivalence de suites

EXERCICE 1.1. Classer les suites ci-dessous par ordre de négligeabilité :

$$n \quad ; \quad n^2 \quad ; \quad n^2 e^{-n} \quad ; \quad \frac{n^2}{\ln(n)} \quad ; \quad \sqrt{n}\ln(n) \quad ; \quad n\sqrt{n}$$

EXERCICE 1.2. Préciser pour chacune des comparaisons suivantes si celle-ci est vraie ou fausse.

$$n^2+n \sim n \quad ; \quad n-2=o(n) \quad ; \quad \frac{e^n}{1+n^2} \sim \frac{e^n}{n^2} \quad ; \quad n^2+e^{-n}=o(n)$$

EXERCICE 1.3. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $(n^2+n+3^n)(e^{-n}+1)$
2. $\dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}$
3. $\dfrac{\ln n+2}{4n+1}$
4. $5n^2-(\ln n)^3$
5. $\dfrac{n^3+6n^2+1}{n^4+3n^2-2n+1}$
6. $\sqrt{n-1}-\sqrt{n}$
7. $\ln(2n^2)+1$
8. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}}$
9. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$
10. e^n+1
11. $e^{-n}+1$
12. $e^{1/n}+1$
13. $\dfrac{e^n}{n}+\dfrac{3n+1}{n^5}e^{\frac{1}{n}}$
14. $\dfrac{n\ln(n)-1}{n^2}$
15. $\dfrac{(n+\ln(n))e^{n+1}}{n}$
16. $n-\ln(1+n^2)$
17. $\ln(n)-\ln(n+1)+\dfrac{1}{n}$
18. $\sqrt{4n^2+5n+2}-\sqrt{4n^2+n+1}$
19. $\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1$
20. $n^{n+1}-(n+1)^n$
21. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

EXERCICE 1.4.
Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n+\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n+2\sqrt{n}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leqslant \dfrac{u_n}{n+2} \leqslant 2+\dfrac{1}{n}$.
4. $((n-1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
5. $((n-1)u_n+e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
6. $1-\dfrac{u_n^2}{2}+o(u_n)=\dfrac{n-1}{n}$ en supposant que $u_n \geqslant 0$

EXERCICE 1.5 (Suites couplées)**.**
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 2v_n \end{array} \right. .$$

1. Écrire une fonction Python qui renvoie, pour un entier n donné, la liste $[u_n, v_n]$.
2. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, u_n et v_n. En déduire que $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
3. En déduire l'expression de u_n, puis de v_n en fonction de n.
4. Déterminer un équivalent simple des ces deux suites.

EXERCICE 1.6 (Difficile)**.**
Démontrer soigneusement les équivalents suivants (lorsque $n \longrightarrow +\infty$) :

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$.

Séries

EXERCICE 1.7 (Séries usuelles)**.**
Montrer l'existence et déterminer les valeurs des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-2)3^n}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-3)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3e^{-n}}{2^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$
9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

EXERCICE 1.8 (Critères d'équivalence)**.**
Étudier la convergence des séries dont le terme général est donné par :

1. $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^6-n^2+1}$
2. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n+n!}$
3. $u_n = 2^n \ln\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+2^n}$
5. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^4 - 1$
6. $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$

EXERCICE 1.9 (Critère de négligeabilité)**.**
Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ puis en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$

EXERCICE 1.10 (Produit infini)**.**
Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 1.11 (En probabilités : Ecricome 2012)**.**
Soit T_3 une variable aléatoire discrète vérifiant $T_3(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ telle que pour tout $k \geqslant 2$

$$P(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \quad \text{où } a_2, a_3 \text{ sont deux réels distincts de }]0,1[$$

1. Vérifier que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k) = 1$
2. Prouver que $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$. Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.
3. Etablir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3. En déduire que T_3 admet une variance.

EXERCICE 1.12 (Approximation de π^2)**.**

1. Justifier la convergence des séries suivantes : $\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   Montrer que $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.
3. Écrire un algorithme Python permettant de calculer une valeur approchée de π^2.

Exercices plus difficiles

EXERCICE 1.13 (Passage par une intégrale : EDHEC 2016)**.**
Soit $x \in [0,1[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,x]$ simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.
2. En déduire que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.
3. Etablir par encadrement que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$
4. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge et que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Remarque : une application pour $x = 1/2$ donne le résultat suivant $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln(2)$ *ce qui permet de donner une approximation de* $\ln(2) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} = 0{,}6823$

EXERCICE 1.14 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la série harmonique est la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$.
On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. (a) En utilisant la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$, montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

(c) En déduire un équivalent de H_n.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

   (a) Montrer que, $\forall x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. *Indication : étudier* $u_n - u_{n-1}$ *et* $v_n - v_{n-1}$.

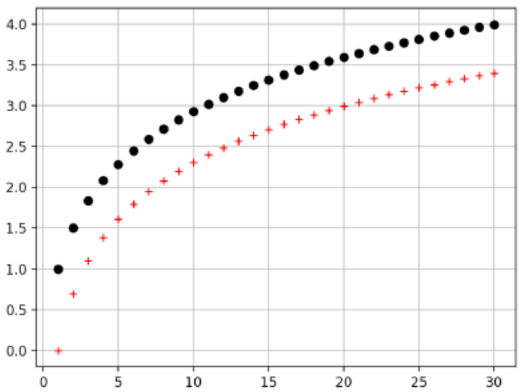
   (c) En déduire l'existence d'un réel γ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
   Remarque : la constante γ *s'appelle la constante d'Euler et vaut approximativement* 0.577.

3. Compléter le code suivant pour qu'il affiche la sortie graphique ci-après illustrant le caractère divergeant de la série harmonique :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def serie_h(n):
   return np.cumsum([ ...... ])

n=.....
N=[k for k in range (1,n+1)]
Y = .......
Z=[np.log(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot ( ... , ... , 'ko')
plt.plot (... , ... , 'k+')
plt.show()
```



EXERCICE 1.15 (Plus difficile : Edhec 2016)**.**
Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \displaystyle\int_n^x \exp\sqrt{t}\,dt$.

1. Étude de f_n.

   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n).

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp\left(-\sqrt{u_n}\right) \leqslant u_n - n \leqslant \exp\left(-\sqrt{n}\right)$.

3. (a) Utiliser la question 2b) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle permette d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```python
import numpy as np
def seuil():
  n=0
  while ...   :
    n= ....
  return n
```

   (b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln(10)$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$.

   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\exp\left(-\sqrt{u_n}\right) \geqslant \exp\left(-\sqrt{n}\right)\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\sqrt{n}\right)$.

   (e) Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?