FEUILLE D'EXERCICES : SUITES ET SÉRIES

CORRECTION

Négligeabilité, équivalence de suites

Exercice 1 :
Classement par ordre de négligeabilité :

$$n^2e^{-n} \quad ; \quad \sqrt{n}\ln(n); \quad n\sqrt{n}; \quad \frac{n^2}{\ln(n)} \quad ; \quad n^2$$

En effet, on a :
• $n^2e^{-n} \longrightarrow 0$ par croissances comparées et les 4 autres suites tendent vers $+\infty$

• $\sqrt{n}\ln(n) = o(n\sqrt{n})$ car $\dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n\sqrt{n}} = \dfrac{\ln(n)}{n} \longrightarrow 0$ par croissances comparée

• $n\sqrt{n} = o\left(\dfrac{n^2}{\ln(n)}\right)$ car $\dfrac{n\sqrt{n}}{\frac{n^2}{\ln(n)}} = \dfrac{\ln(n)}{n} \longrightarrow 0$ par croissances comparées

• $\dfrac{n^2}{\ln(n)} = o(n^2)$ car $\dfrac{\frac{n^2}{\ln(n)}}{n^2} = \dfrac{1}{\ln(n)} \longrightarrow 0.$

Exercice 2 :
• $n^2 + n \sim n$ est faux car $n^2 + n \sim n^2$ et $n^2 \not\sim n$.

• $n - 2 = o(n)$ est faux car $\dfrac{n-2}{n} \sim \dfrac{n}{n} = 1$ donc $\dfrac{n-2}{n} \not\longrightarrow 0$.

• $\dfrac{e^n}{1+n^2} \sim \dfrac{e^n}{n^2}$ est vrai car $\left.\begin{array}{c} e^n \sim e^n \\ 1+n^2 \sim n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{e^n}{1+n^2} \sim \dfrac{e^n}{n^2}$ par quotient.

• $n^2 + e^{-n} = o(n)$ est faux car $e^{-n} = o(n^2)$ donc $n^2 + e^{-n} \sim n^2$ et n^2 n'est pas négligeable devant n.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $\left.\begin{array}{ll} n^2+n+3^n \sim 3^n & \text{car } n^2+n = o(3^n) \text{ par croissances comparées} \\ e^{-n}+1 \sim 1 & \text{car } e^{-n} = o(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$ (par produit) $\boxed{(n^2+n+3^n)(e^{-n}+1) \sim 3^n}$

2. $\left.\begin{array}{ll} 3^{n+1}+2^{n+1} \sim 3^{n+1} & \text{car } 2^{n+1} = o(3^{n+1}) \text{ puisque } \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \longrightarrow 0 \\ 3^n+2^n \sim 3^n & \text{car } 2^n = o(3^n) \text{ puisque } \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (par quotient) $\boxed{\dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} \sim 3}$

3. $\left.\begin{array}{c} \ln n + 2 \sim \ln n \\ 4n+1 \sim 4n \end{array}\right\} \Rightarrow$ (par quotient) $\boxed{\dfrac{\ln n + 2}{4n+1} \sim \dfrac{\ln n}{4n}}$.

4. $(\ln n)^3 = o(n^2)$ par croissances comparées $\Rightarrow 5n^2 - (\ln n)^3 = 5n^2 + o(n^2) \Rightarrow \boxed{5n^2 - (\ln n)^3 \sim 5n^2}$

5. Par propriété des “suites polynomiales” on a directement $\dfrac{n^3+6n^2+1}{n^4+3n^2-2n+1} \sim \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \boxed{\dfrac{n^3+6n^2+1}{n^4+3n^2-2n+1} \sim \dfrac{1}{n}}$

6. Commençons en utilisant la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n-1}-\sqrt{n} = \frac{n-1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Ensuite déterminons un équivalent de $\sqrt{n-1}+\sqrt{n}$.

Attention le raisonnement suivant est faux :

$\begin{cases} \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n} & \text{est vrai} \\ \sqrt{n} \sim \sqrt{n} & \text{bien sûr vrai aussi} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{n-1}+\sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}.$

Sauriez-vous trouver l'erreur ??

Pour rester rigoureux, on factorise par $\sqrt{n}$ et on a :

$$\sqrt{n-1}+\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}+1\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}+1\right)$$

Or $\frac{n-1}{n} \sim 1$ et donc $\sqrt{\frac{n-1}{n}}+1 \longrightarrow 2$. Par conséquent $\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$.

Conclusion : $\boxed{\sqrt{n-1}-\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}}$.

7. En utilisant les propriétés algébriques du logarithme on a :

$$\ln(2n^2)+1 = \ln 2+\ln(n^2)+1 = \ln 2+2\ln n+1 = 2\ln n+o(\ln n) \quad \text{puisque } \ln 2+1 = o(\ln n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(2n^2)+1 \sim 2\ln n}$$

8. $\left.\begin{matrix} n+1 \sim n \\ n^3-2n+1 \sim n^3 \quad \Rightarrow \sqrt{n^3-2n+1} \sim \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{(par quotient)} \ \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}} \sim \dfrac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

9. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{2}{(n-1)(n+1)}$ et $(n-1)(n+1) \sim n^2$ donc $\boxed{\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{2}{n^2}}$.

10. $\boxed{e^n+1 \sim e^n}$ puisque $1 = o(e^n)$.

11. $\boxed{e^{-n}+1 \sim 1}$ puisque $e^{-n} \longrightarrow 0$ et $e^{-n}+1 \longrightarrow 1$

12. $\boxed{e^{1/n}+1 \sim 2}$ puisque $e^{1/n} \longrightarrow 1$ et $e^{1/n}+1 \longrightarrow 2$

13. On a : $\left.\begin{cases} e^{1/n} \sim 1 \text{car } e^{1/n} \longrightarrow 1 \\ \dfrac{3n+1}{n^5} \sim \dfrac{3}{n^4} \end{cases}\right\} \Rightarrow \dfrac{3n+1}{n^5}e^{\frac{1}{n}} \sim \dfrac{3}{n^4} \longrightarrow 0.$

Or $\dfrac{e^n}{n} \longrightarrow +\infty$ par croissances comparées donc $\dfrac{3n+1}{n^5}e^{\frac{1}{n}} = o\left(\frac{e^n}{n}\right)$.

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{e^n}{n}+\dfrac{3n+1}{n^5}e^{\frac{1}{n}} \sim \dfrac{e^n}{n}}$.

14. $n\ln(n)-1 \sim n\ln n \Rightarrow \text{(par quotient)} \ \dfrac{n\ln(n)-1}{n^2} \sim \dfrac{n\ln n}{n^2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{n\ln(n)-1}{n^2} \sim \dfrac{\ln n}{n}}$.

15. Par croissances comparées on a $n+\ln n \sim n$ et donc par produit et quotient on a $\boxed{\dfrac{(n+\ln(n))e^{n+1}}{n} \sim e^{n+1}}$.

16. Remarquons tout d'abord que :

$$\ln(1+n^2) = \ln(n^2) + \ln\left(\frac{1}{n^2}+1\right) = 2\ln(n) + \ln\left(\frac{1}{n^2}+1\right) \quad \Rightarrow \quad \ln(1+n^2) \sim 2\ln(n)$$

Par ailleurs, nous avons que par croissances comparées $\ln(n) = o(n)$ donc nous avons $n - \ln(1+n^2) = n + o(n)$ et donc $\boxed{n - \ln(1+n^2) \sim n}$

$n - \ln(1+n^2)$

17. **(khûbes) Attention à ne pas additionner les équivalents !**

$$\begin{array}{rcl} \ln(n) - \ln(n+1) + \dfrac{1}{n} & = & \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} \\ & = & \frac{1}{n} - \ln\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ & = & \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ & = & \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{car } \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ & = & \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{\ln(n) - \ln(n+1) + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{2n^2}}$

18. Par quantité conjuguée :

$$\sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1} = \frac{4n^2+5n+2-(4n^2+n+1)}{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1}} = \frac{4n+1}{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1}}.$$

En factorisant par $4n^2$ dans les racines carrées au dénominateur et en utilisant une méthode similaire à la question 6. on en déduit que

$$\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1} \sim 2\sqrt{4n^2} = 4n.$$

Par ailleurs au numérateur nous avons $4n+1 \sim 4n$ donc par quotient $\boxed{\sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1} \sim 1}$.

19. **(khûbes)**

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 & = & \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad \text{car } \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x) \\ & = & \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{car } (1+u)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{=} \frac{1}{2}u + o(u) \\ & = & \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \sim \dfrac{1}{2n}}$

20. Remarquons que $(n+1)^n = o(n^{n+1})$:

En effet :

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}.$$

Or il est classique de démontrer que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^1$ et donc que $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \longrightarrow 0$.

Il s'ensuit que

$$n^{n+1} - (n+1)^n = -(n+1)^n + o\big((n+1)^n\big) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^{n+1} - (n+1)^n \sim -(n+1)^n}.$$

21. En utilisant les propriétés du logarithme et en reconnaissant une identité remarquable :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n^2}}.$$

Exercice 4 :
Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2 \Rightarrow u_n \sim 2$

2. On remarque $n+\sqrt{n} \sim n$ et $n+2\sqrt{n} \sim n$ donc en divisant tout par n : $\dfrac{n+\sqrt{n}}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+2\sqrt{n}}{n}$ et on conclut que $\dfrac{u_n}{n} \longrightarrow 1$ $\boxed{u_n \sim n}$.

3. Vu que $2+\dfrac{1}{n} \longrightarrow 2$ en utilisant le même argument qu'à la question précédente on en déduit $\dfrac{u_n}{n+2} \sim 2$ et donc par produit que $u_n \sim 2(n+2) \sim 2n \Rightarrow \boxed{u_n \sim 2n}$.

4. $((n-1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2 \Rightarrow (n-1)u_n \sim 2$ et par quotient $u_n \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n} \Rightarrow \boxed{u_n \sim \dfrac{2}{n}}$.

   Attention, dans les deux dernières questions, pour éviter d'additionner des équivalents on va utiliser pleinement la propriété dit de "stabilité par combinaisons linéaires" de la relation de négligeabilité pour effectuer des calculs de somme et de différence pour aboutir à une relation du type : $a_n = b_n + o(b_n)$ **pour conclure que** $a_n \sim b_n$**.**

5. $((n-1)u_n + e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2 \Rightarrow (n-1)u_n + e^n = 2 + o(1)$.

   Il s'ensuit :
$$(n-1)u_n = 2 - e^n + o(1) \Rightarrow u_n = \tfrac{2}{n-1} - \tfrac{e^n}{n-1} + o\left(\tfrac{1}{n-1}\right).$$
   Or $\frac{2}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) = o\left(\frac{e^n}{n-1}\right)$ puisque $\frac{2}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) \longrightarrow 0$ et que par C.C. $\frac{e^n}{n-1} \longrightarrow +\infty$.

   Donc $u_n \sim -\frac{e^n}{n-1} \sim -\frac{e^n}{n} \Rightarrow \boxed{u_n \sim -\dfrac{e^n}{n}}$.

6. $1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \frac{n-1}{n}$ en supposant que $u_n \geqslant 0$.
$$1 - \tfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \tfrac{n-1}{n} \Rightarrow \tfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \underbrace{1 - \frac{n-1}{n}}_{=\frac{1}{n}} \Rightarrow u_n^2 + o(u_n^2) = \tfrac{2}{n} \Rightarrow u_n^2 \sim \tfrac{2}{n} \Rightarrow \boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}}$$

Exercice 5 :(Suites couplées)

```python
def suites(n):
    u,v=2,1/3
    for k in range(n):
        u,v=u+3*v,2*u+2*v
    return [u,v]
```

2. En utilisant la relation couplée de définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis en remarquant que $6v_n = 2(u_{n+1} - u_n)$ on obtient successivement :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & u_{n+1} + 3v_{n+1} \\ & = & u_{n+1} + 3(2u_n + 2v_n) \\ & = & u_{n+1} + 6u_n + 6v_n \\ & = & u_{n+1} + 6u_n + 2(u_{n+1} - u_n) \\ & = & 3u_{n+1} + 4u_n. \end{array}$$

3. **Rappel : suites du type $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$**

Equation caractéristique : $(EC) : ax^2 + bx + c = 0$
Forme générale des solutions :

- Si $\Delta = 0$ et r_0 est l'unique solution de (EC) alors il existe des réels (λ, μ) tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n.$$
- Si $\Delta > 0$ et r_1 et r_2 sont les deux solutions de (EC) alors il existe des réels (λ, μ) tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si $\Delta < 0$ on ne peut pas conclure.

Détermination des constantes (λ, μ) : On détermine les constantes (λ, μ) à l'aide des conditions initiales (u_0, u_1) en résolvant un système linéaires de type 2×2.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 de discriminant $\Delta = 25$ et dont les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.

On en déduit la forme générale suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu 4^n$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On déterminer λ et μ à l'aide des conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1 = u_0 + 3v_0 = 3$.

Ainsi λ et μ sont solutions du système :

$$\begin{cases} 2 = \lambda + \mu \\ 3 = -\lambda + 4\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 5\mu = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

Ccl : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n + 4^n}$.

On en déduit l'expression de v_n en fonction de n à l'aide de la relation $u_{n+1} = u_n + 3v_n$:

$$\begin{array}{rcl} v_n & = & \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) \\ & = & \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 4^{n+1} - ((-1)^n + 4^n)\right) \\ & = & \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 4.4^n - (-1)^n - 4^n\right) \\ & = & \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 3.4^n + (-1)^{n+1}\right) \\ & = & \frac{1}{3}\left(2.(-1)^{n+1} + 3.4^n\right) \end{array}$$

Ccl : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + 4^n}$.

Exercice 6 :

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}.$$

Or, $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$ on a : $n - j \sim n$ (et il y a exactement k entiers entre 0 et $k-1$ inclus).

Donc par produit :
$$n(n-1)\dots(n-(k-1)) \sim n^k.$$

<u>Conclusion :</u> On a bien $\boxed{\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}}$.

2. Commençons par noter que :

$$\sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{k=0}^{n-1} k! + n!$$

Montrons maintenant que $\sum_{k=0}^{n-1} k! = o(n!)$:

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k! = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n}.$$

Il s'agit maintenant de démontrer que $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \longrightarrow 0$.

Or pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$ on a : $0 \leqslant \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ et donc

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}}_{n-1 \text{ termes}} \frac{1}{n(n-1)} = (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \longrightarrow 0$ ce qui termine la preuve que $\sum_{k=0}^{n-1} k! = o(n!)$.

Nous obtenons donc bien $\sum_{k=0}^{n} k! = n! + o(n!)$ et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k! \sim n!}$

Séries

Méthode

(Calculer une somme d'une série convergente)
On procède en deux étapes. Votre rédaction doit faire clairement apparaître ces deux étapes.
Etape 1 : on prouve la convergence de la série

1. On utilise la notation *série* $\sum\limits_n u_n$ et on la transforme en utilisant les propriétés et opérations sur les sommes : linéarité, changement d'indice,...
2. On effectue ces transformations jusqu'à obtenir une combinaison linéaire de séries usuelles.
3. On justifie la convergence de chaque série usuelle intervenant dans l'expression trouvée.

   Si une et une seule série de la liste diverge alors la série diverge.

Etape 2 : calcul de la somme (*sous réserve de convergence*)
On calcule la somme à l'aide des formules sur les séries usuelles :

1. **Séries géométriques convergentes** $\iff |q|<1$ **:**

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

2. **Séries exponentielles convergentes :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exercice 7 :(Séries usuelles)

1. • Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-n}$ converge :

$$\sum_{n\geqslant 1} e^{-n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

   On reconnait une série géométrique (tronquée) de raison $q = \frac{1}{e} \in]-1;1[$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-n}$ converge.

   • Calculons la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} \\ &= \frac{1}{e\left(1-\frac{1}{e}\right)} \\ &= \frac{1}{e-1}.\end{aligned}$$

   <u>Ccl :</u> $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{e-1}}$.

2. • Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{(n-1)!}$ converge :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{(n-1)!} &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{k+1}{k!} && \text{changement d'indice } k=n-1\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k!}+\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!} && \text{par linéarité}\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\frac{k}{k!}+\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!} && \text{premier terme nul}\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}+\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!} && \text{car } \forall k\geqslant 1,\ \frac{k}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}\\
&= \sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{p!}+\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!} && \text{changement d'indice } p=k-1\\
&= 2\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!} && \text{indices muets}
\end{aligned}$$

On reconnait une série exponentielle avec $x=1$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{(n-1)!}$ converge.

• Calculons la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!} = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=2e.$$

Ccl : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}=2e}$.

3. • Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n-2)3^n}{n!}$ converge :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n-2)3^n}{n!} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{n3^n}{n!}-2\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{n!} && \text{par linéarité}\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n}{(n-1)!}-2\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{n!} && \text{premier terme nul + simplification factoirelle}\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\frac{3^{k+1}}{k!}-2\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{n!} && \text{changement d'indice } k=n-1\\
&= 3\sum_{k\geqslant 0}\frac{3^k}{k!}-2\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{n!} && \text{indices muets}
\end{aligned}$$

On reconnait une série exponentielle avec $x=3$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n-2)3^n}{n!}$ converge.

• Calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-2)3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}=e^3.$$

Ccl : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}=e^3}$.

4. • Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{a^n}{(n-3)!}$ converge :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 3}\frac{a^n}{(n-3)!} &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{a^{k+3}}{k!} && \text{changment d'indice } k=n-3\\
&= a^3\sum_{k\geqslant 0}\frac{a^k}{k!}
\end{aligned}$$

On reconnait une série exponentielle avec $x = a$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{a^n}{(n-3)!}$ converge.

• Calculons la somme :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-3)!} \quad = \quad a^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = a^3 e^a.$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = ae^a}$.

5. • Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$ converge :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n-1)!} &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)+n}{(n-1)!} && \text{classiquement on a } n^2 = n(n-1)+n \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(n-1)!} && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{k\geqslant 0} \frac{k+1}{k!} && \text{premier terme nul + changement d'indice } k = n-1 \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-2)!} + 2\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} && \text{simpl. factorielle + somme déjà vue question 2} \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n-2+2}{(n-2)!} + 2\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n-2}{(n-2)!} + 2\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n-3)!} + 2\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} + 2\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} && \text{simpl. factorielle + changment d'indice } k = n-2 \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} + 4\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} && \text{changment d'indice } k = n-3 \\
&= 5\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

On reconnait une série exponentielle avec $x = 1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$ converge.

• Calculons la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} \quad = \quad 5\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 5e$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = 5e}$.

6. • Montrons que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+2)}$ converge.

Remarquons que (classiquement) : $\forall k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k(k+2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+2)} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\right) && \text{par linéarité}
\end{aligned}$$

On reconnait deux séries télescopiques donc on passe par la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+2)}$:

$$\begin{aligned} S_N &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k\geqslant 1}^{N}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{N+1}-1\right) \qquad \text{par télescopage} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} S_N = \frac{3}{4}.$$

La suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+2)}$ converge.

On remarque au passage que la limite est heureusement positive pour une somme de termes positifs !

• Calculons la somme :

Par définition de la somme d'une série convergente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{N\longrightarrow+\infty} S_N.$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}}$.

7. • Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3e^{-n}}{2^n}$ converge :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{3e^{-n}}{2^n} = 3\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2e}\right)^n.$$

On reconnaît une série géométrique (tronquée) de raison $q = \frac{1}{2e}$ avec $2e > 4$ donc $|q| < 1$.

• Calculons la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3e^{-n}}{2^n} &= 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n \\ &= 3\frac{\frac{1}{2e}}{1-\frac{1}{2e}} \\ &= \frac{3}{2e\left(1-\frac{1}{2e}\right)} \\ &= \frac{3}{2e-1} \end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3e^{-n}}{2^n} = \frac{3}{2e-1}}$.

8. (*rédaction plus succincte*)

On reconnait une série géométrique convergente (tronquée) de raison $q = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n &= \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1+\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{1}{6}}$.

9. • Montrons que la série $\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ converge :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} && \text{changment d'indice } n=k-1\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \text{par linéarité}\end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée de raison $q=\frac{1}{2}$ donc la série $\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ converge.

• Calculons la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{8}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\frac{1}{2}}$.

Exercice 8 :(Critère de convergence)

1. $u_n=\dfrac{n^2-1}{n^6-n^2+1}\sim\dfrac{n^2}{n^6}=\dfrac{1}{n^4}$. Or la série $\sum\dfrac{1}{n^4}$ CV (Riemann $\alpha=4$) $\underset{\text{Critère 3}}{\Longrightarrow}$ la série $\sum u_n$ CV.
2. $u_n=\dfrac{2^n}{3^n+n!}\sim\dfrac{2^n}{n!}$ car $3^n=o(n!)$. Or la série $\sum\dfrac{2^n}{n!}$ CV (exponentielle $x=2$) $\underset{\text{Critère 3}}{\Longrightarrow}$ la série $\sum u_n$ CV.
3. $u_n=2^n\ln\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)=2^n\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)\sim\dfrac{2^n}{3n}$ par équivalent usuel. Or $n=o(2^n)$ par C.C donc $\dfrac{2^n}{3n}\not\longrightarrow 0$ mais tend vers $+\infty$ donc la série $\sum\dfrac{2^n}{3n}$ DV grossièrement et $\underset{\text{Critère 3}}{\Longrightarrow}$ la série $\sum u_n$ CV diverge.
4. $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+2^n}\sim\dfrac{n^2}{2^n}$. Or par linéarité $\sum\dfrac{n^2}{2^n}=\sum n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\sum n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et on reconnait deux séries géométriques dérivées de raison $q=\frac{1}{2}$ donc la série $\sum\dfrac{n^2}{2^n}$ CV $\underset{\text{Critère 3}}{\Longrightarrow}$ la série $\sum u_n$ CV.
5. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^4-1\sim 4\times\left(-\dfrac{1}{2n}\right)=-\dfrac{2}{n}$ par équivalent usuel. Or $\sum\dfrac{2}{n}=2\sum\dfrac{1}{n}$ DV (série harmonique = Riemann $\alpha=1$) $\underset{\text{Critère 3}}{\Longrightarrow}$ la série $\sum u_n$ DV.
6. $u_n=\dfrac{4^n}{n^2}\not\longrightarrow 0$ par C.C. $\underset{\text{Critère de DV grossière}}{\Longrightarrow}$ la série $\sum u_n$ DV.

Exercice 9 :(Critère de négligeabilité)
On étudie le quotient :

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha \ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}.$$

Choisissons $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$ par exemple $\alpha = 1,2$.
On a alors :

- d'une part : $\frac{3}{2} - \alpha > 0$ donc par croissances comparées $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} \longrightarrow 0$ et donc $\boxed{\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$.
- d'autre part : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha > 1$ ($\alpha = 1,2$).

Ccl : D'après le critère de négligeabilité des STP, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} \text{ converge}}$.

Exercice 10 :(Produit infini)
Pour étudier un produit infini, il est souvent nécessaire et bien plus utile de se ramener à une série en passant par le logarithme, c'est à dire en mettant sous forme exponentielle :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

Il suffit maintenant d'étudier la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ pour en déduire la nature de la suite (u_n).
Or par équivalents usuels $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2}$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ CV (Riemann $\alpha = 2$).
Ainsi, d'après le Critère 3 la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ CV.
En se rappelant que par définition de la somme d'une série $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) converge et on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

Exercice 11 :(Utilisation des séries en probabilités)
Soit T_3 une variable aléatoire discrète vérifiant $T_3(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ telle que pour tout $k \geqslant 2$:

$$P(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \quad \text{où } a_2, a_3 \text{ sont deux réels distincts de }]0,1[$$

1. **A propos de la question : Vérifier que la loi de X est bien une loi de probabilité**

Définition : On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie une loi de probabilité si

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant 0, \qquad (2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

Loi d'une variable aléatoire X : Soit X une variable aléatoire de support $X(\Omega)$ (cas à adapter). La loi de X est la donnée de la suite $\big(P(X=n)\big)_{n\imath X(\Omega)}$.
Vérification : La loi $\big(P(X=n)\big)_{n\imath X(\Omega)}$ défini bien une moi de probabilité si et seulement si

$$\sum_{n\in X(\Omega)} P(X=n) = 1.$$

Nota bene : *Il n'est pas demandé aux concours de prouver la convergence de cette série ; seul un calcul de somme compte. On peut le comprendre en utilisant la relation (toujours vraie dans un espace probabilisé) les événements $(X=n)$ étant 2 à 2 incompatibles :*

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n).$$

Or $\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=n) \subset \Omega$ étant un événement on a $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=n)\right) \leqslant 1$ d'où la non-divergence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)$.

Calculons donc directement la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3=k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{+\infty}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(a_3)^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty}(a_2)^{k-2}\right) && \text{par linéarité} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(a_3)^{n} - \sum_{p=0}^{+\infty}(a_2)^{p}\right) && \text{changements d'indices } n=k-2 \text{ (somme 1) et } p=k-2 \text{ (} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{1-a_2-(1-a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)} \\
&= \frac{a_3-a_2}{a_3-a_2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ccl : On a bien $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3=k) = 1}$.

2.

Montrer qu'une variable aléatoire discrète admet une espérance et la calculer

Soit X une variable aléatoire discrète de support $\mathbb{N}$ (*rédaction à adapter si $X(\Omega)$ est différent*).
Etape 1: convergence d'une série

1. On regarde si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} nP(X=n)$ est à termes positifs
2. On prouve la convergence de cette série par les méthodes classiques sur les séries : séries usuelles, télescopiques, théorème de convergence des STP ...

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} nP(X=n)$ diverge alors X n'admet pas d'espérance.
Etape 2: calcul de la somme (*sous réserve de convergence*
On calcule la somme de la série par les méthodes habituelles et on conclut que

$$E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n).$$

Théorème de transfert : Si $Y=g(X)$ alors la variable Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g(n)P(X=n)$ converge absolument et sous réserve de convergence on a :

$$E(g(X))=\sum_{n=0}^{+\infty} g(n)P(X=n).$$

• Montrons que T_3-1 admet une espérance :

D'après le théorème de transfert la variable $T_3-1=g(T_3)$ (avec $g(k)=k-1$) admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2}(k-1)P(T_3=k)$ converge absolument. Dans la somme on a $k\geqslant 2$ donc on en déduit que cette série est une série à termes positifs. Il suffit donc d'étudier sa convergence.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 2}(k-1)P(T_3=k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k\geqslant 2}(-1)\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k\geqslant 2}(k-1)(a_3)^{k-2}-\sum_{k\geqslant 2}(k-1)(a_2)^{k-2}\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{n\geqslant 1} n(a_3)^{n-1}-\sum_{n\geqslant 1} n(a_2)^{n-1}\right) \quad \text{par changement d'indice } n=k-1
\end{aligned}$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées de raisons a_2 et a_3. Ces réels sont supposés appartenir à l'intervalle $]0;1[$ ce qui prouve la convergence de toutes les séries en jeu.

Donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 2}(k-1)P(T_3=k)$ converge et par conséquent <u>la variable T_3-1 admet une espérance.</u>

• Déterminons $E(T_3-1)$:

$$\begin{aligned}
E(T_3-1) &= \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)P(T_3=k)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_3)^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_2)^{n-1}\right)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{(1-a_2)^2-(1-a_3)^2}{\big((1-a_2)(1-a_3)\big)^2}\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{\big((1-a_2-(1-a_3)\big)\big((1-a_2+1-a_3)\big)}{\big((1-a_2)(1-a_3)\big)^2}\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{\big(a_3-a_2\big)\big((2-(a_2+a_3)\big)}{\big((1-a_2)(1-a_3)\big)^2}\\
&= \frac{2-(a_2+a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)}
\end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{T_3-1 \text{ admet une espérance et } E(T_3-1)=\dfrac{2-(a_2+a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)}}$.

On en déduit la valeur de $E(T_3)$ car par linéarité :

$$E(T_3-1)=E(T_3)-1 \iff E(T_3)=E(T_3-1)+1.$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{T_3 \text{ admet une espérance et } E(T_3)=\dfrac{2-(a_2+a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)}+1}$.

3. De la même manière qu'à la question précédente, la variable $T_3(T_3-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)P(T_3=k)$ converge absolument. Là encore on a une série à termes positifs dont il d'étudier sa convergence.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)P(T_3=k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k\geqslant 2}k(k-1)\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k\geqslant 2}k(k-1)(a_3)^{k-2}-\sum_{k\geqslant 2}k(k-1)(a_2)^{k-2}\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées secondes de raisons a_2 et a_3. Ces réels sont supposés appartenir à l'intervalle $]0;1[$ ce qui prouve la convergence de toutes les séries en jeu.

La série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)P(T_3=k)$ converge et par conséquent <u>la variable $T_3(T_3-1)$ admet une espérance.</u>

• Déterminons $E\big(T_3(T_3-1)\big)$:

$$\begin{aligned}
E\big(T_3(T_3-1)\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)P(T_3=k)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)(a_3)^{k-2}-\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)(a_2)^{k-2}\right)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{2}{(1-a_3)^3}-\frac{2}{(1-a_2)^3}\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{2\big(1-a_2)^3-(1-a_3)^3\big)}{\big((1-a_2)(1-a_3)\big)^3}\\
&= \frac{2\big(1-a_2)^3-(1-a_3)^3\big)}{(a_3-a_2)\big((1-a_2)(1-a_3)\big)^2}\\
&= \frac{2(a_2-a_3)\big((1-a_2)^2+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2\big)}{(a_3-a_2)\big((1-a_2)(1-a_3)\big)^2}\\
&= \frac{2\big((1-a_2)^2+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2\big)}{(1-a_2)(1-a_3)}.
\end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{T_3(T_3-1) \text{ admet une espérance et } E\big(T_3(T_3-1)\big) = \dfrac{2\big((1-a_2)^2+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2\big)}{(1-a_2)(1-a_3)}}$.

Variance

Définition : La variable X admet une variance si la variable $\big(X-E(X)\big)^2$ admet une espérance et sous réserve d'existence on a :

$$V(X) = E\Big(\big(X-E(X)\big)^2\Big).$$

Formule de Koenig-Huygens : Si X^2 admet une espérance, alors X admet une variance et on a la formule :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2.$$

On remarquera que très régulièrement $E(X)$ est une quantité que l'on aura déjà calculée et que $E(X^2)$ doit se calculer (sous réserve d'existence) à l'aide du théorème de transfert.
Remarquons enfin que la transformation $X^2 = X(X-1)+X$ permet par linéarité et (également via le théorème de transfert) de calculer $E(X^2)$.

<u>Variance :</u>

On ne demande pas de la calculer. Montrons simplement que T_3^2 admet une espérance en se servant des résultats précédents en remarquant que :

$$T_3^3 = T_3(T_3-1)+T_3.$$

On a vu que T_3 et $T_3(T_3-1)$ admettent des espérance, donc par linéarité de l'espérance on en conclut que T_3^2 admet une espérance et de plus

$$E(T_3^2) = E\big(T_3(T_3-1)\big)+E(T_3).$$

<u>Ccl :</u> T_3^2 admet une espérance donc T_3 admet une variance.

Exercice 12 :(Approximation de π^2)

1. • Pour la première série on a :
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{(2p+1)^2} \sim \dfrac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p^2} \text{converge} \end{array}\right. \Rightarrow \sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^2} \text{ converge par critère d'équivalence.}$$

   • Pour la deuxième série, on passe par la convergence absolue car $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

   Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument et donc converge puisque la convergence absolue entraine la convergence.

2. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   • Remarquons qu'en séparant les indices pairs et impairs nous avons la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}$$

Remarquons également que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

Finalement nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} \\
&= \frac{3\pi^2}{24} \\
&= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

• De même en séparant les indices pairs et impairs nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} \\
&= -\frac{2\pi^2}{24} \\
&= -\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

3. En se basant sur les résultats précédents on a $\boxed{\pi^2 = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}$.

Les termes $8 \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}$ fournissent donc des approximations de π^2.

Algorithme Python permettant de calculer une valeur approchée de π^2 :

```python
def approx(n):
  S=0
  for k in range(n):
    S=S+1/(2*k+1)**2
  return 8*S
```

La sortie Python pour $n = 100$ *donne* $\pi^2 \approx 9.867604....$ *alors que* $\pi^2 \approx 9.869604...$

Exercices plus difficiles tombés aux concours

Exercice 13 :(Extrait d'Edhec 2016)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1[$ et et $t \in [0,x]$, on a $t \neq 1$ et on reconnait une somme géométrique que l'on calcule par changement d'indice évident :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

2. Remarquons que :

$$\int_0^x t^{p-1} dt = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \frac{x^p}{p}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} &= \sum_{n=1}^{n} \int_0^x t^{p-1} dt \\
&= \int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \qquad \text{par linéarité de l'intégrale on peut intervertir les symboles } \int_0^x \text{ et } \sum_{p=1}^{n} \\
&= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\
&= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0,x]$.

$$0 \leqslant t \leqslant x \quad \Rightarrow \quad 1-x \leqslant 1-t \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x} \quad (\text{car } t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t^n \geqslant 0).$$

Ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt.$$

Or,

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}}.$$

Or $x \in [0;1[$ est fixé, donc lorsque $n \longrightarrow +\infty$, par croissances comparées on a :

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Ainsi d'après l'encadrement $(*)$ et le thm des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} = 0}.$$

4. On note $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$ la suite des sommes partielles de la série.

   D'après ce qui précède, on a :

$$S_n = -\ln(1-x) - \underbrace{\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt}_{\longrightarrow 0}.$$

   Donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et de pus :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = -\ln(1-x).$$

   Ccl : $\boxed{\text{La série } \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{p} \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)}$.

*On remarque que pour $x = -1$ le résultat donne la somme de **la série harmonique alternée** :*

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2)$$

Exercice 14 :(Développement asymptotique de la série harmonique)
Voir DM2.

Exercice 15 :(Plus difficile : Edhec 2016)
(kûbes) $\rightsquigarrow$ **voir corrigé du Sujet Edhec ECE 2016**.