FEUILLE D'EXERCICES

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

EXERCICE 10.1. Résolutions de systèmes 2×2

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \end{cases}$ (deux méthodes possibles).

2. $\begin{cases} x' &= 3x-6y \\ y' &= 2x-4y \end{cases}$ avec la condition initiale $x(0)=1,\ y(0)=-2$.

EXERCICE 10.2. Résolution avec A diagonalisable

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= 3y+2z \\ y' &= -2x+5y+2z \\ z' &= 2x-6y-3z \end{cases}$$

1. Ecrire le système différentiel sous forme : $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $Sp(A) = \{-1,1,2\}$. En déduire que A est diagonalisable.
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Résoudre le système $Y' = DY$ où D est la matrice diagonale trouvée à la question précédente.
5. En déduire les solutions du système différentiel initial.
6. Déterminer la solution du problème de Cauchy $X' = AX$ avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 10.3. Résolution avec A trigonalisable

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre $E_1(A)$ associé.
   (b) Calculer $(A-I_3)^3$ puis en déduire le spectre de A : A est-elle diagonalisable ?
   (c) On considère un vecteur e_1 appartenant à $\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ ayant pour première composante -1, et on pose $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (1,0,0)$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.
   En déduire l'existence d'une matrice inversible P, que l'on explicitera, telle que $A = P\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

2. On cherche à résoudre le système différentiel (S) : $\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= x_1 + 2x_2 \end{cases}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $P^{-1}X' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$.

   (b) Écrire alors le système différentiel $\left(S'\right)$ vérifié par y_1, y_2 et y_3.

   (c) Résoudre $\left(S'\right)$ puis en déduire les solutions de (S).
   Indication : pour une équation différentielle s'écrivant sous la forme $y' = y + \alpha t^k \exp t$, où $k \in \mathbb{N}$, on cherchera une solution particulière sous la forme $y_P(t) = a t^{k+1} \exp t$.

EXERCICE 10.4. Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y^{(3)}(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0.$$

Pour cela, on pose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$.

1. Montrer que y est solution de (E) ssi $X' = AX$ où $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice à coefficients constants que l'on précisera.

2. Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on précisera.

3. Résoudre le système $X' = AX$.

4. En déduire les solutions de l'équation (E).

EXERCICE 10.5. États d'équilibre d'un système différentiel

On cherche à résoudre le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' &= 2y + z + 2 \\ y' &= -y + 2z - 1 \\ z' &= y + 1 \end{cases}$.

1. Déterminer une solution particulière constante de ce système différentiel. On note X_p la matrice colonne correspondant à cette solution particulière.

2. Montrer que $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est solution de (S) ssi $X - X_p$ est solution d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants que l'on notera (S_0).

3. Résoudre (S_0) puis en déduire les solutions de (S).

4. Quels sont les états d'équilibre de (S) ?

EXERCICE 10.6. Un système différentiel linéaire à coefficients non constants

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $t-1$ est valeur propre de $A(t)$ pour tout réel t et déterminer le sous-espace propre $E_{t-1}\big(A(t)\big)$ associé.

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible, à coefficients indépendants de t, et $D(t)$ une matrice diagonale telles que $A(t) = PD(t)P^{-1}$.

2. On cherche à résoudre le système différentiel (S) suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & (t+3)x(t)+2y(t) \\ y'(t) & = & -4x(t)+(t-3)y(t) \end{array}\right. .$$

Pour cela, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$.

(a) Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, écrire les équations différentielles vérifiées par y_1 et y_2.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Z(t) = e - t^2/2Y(t)$.
Déterminer $Z(t)$.

(c) En déduire les solutions du système différentiel (S).

EXERCICE 10.7. Sujet 0 Ecricome 2023

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A.

1. Déterminer le rang de $A - 6I_3$.
   En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
   Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.

3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Donner la matrice B de f dans cette base.

   (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P. On ne cherchera pas P^{-1}.

4. La matrice A est-elle inversible? La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie 2

On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x'(t) = 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{array}\right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1. En utilisant le module `scipy.integrate` de `Python` , on obtient le tracé suivant des solutions du système (voir page suivante), en faisant varier les valeurs de $x(0), y(0), z(0)$.

   Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

2. Montrer que pour tout réel $t : X'(t) = AX(t)$.

3. On note pour tout réel $t : Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que pour tout réel $t, Y'(t) = P^{-1}X'(t)$. Montrer que pour tout réel $t : Y'(t) = BY(t)$.

   (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 6\varphi(t)$$

   (b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) \quad (\mathscr{E}_2)$$

   (c) Soit c un réel.
   Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_3$:

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}$$

   Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{E}_3)$.

4. En notant, pour tout réel $t, Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathscr{E}_1)$, β est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et α est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

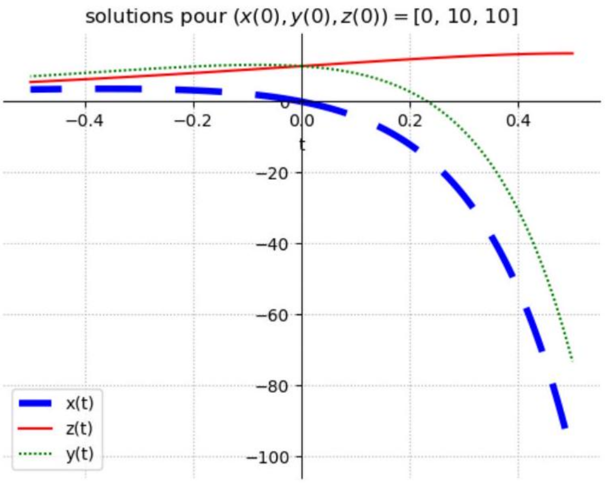
5. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

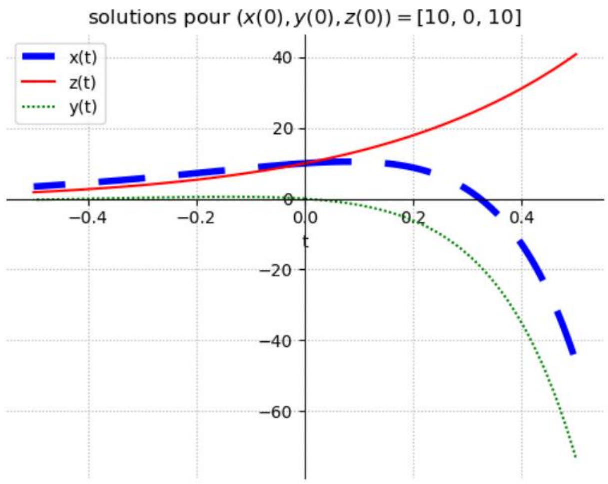
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = 2\left(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2\right) e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) = 2\left(\lambda_1 t + \lambda_2\right) e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) = \left(2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2\right) e^{2t} \end{cases}$$

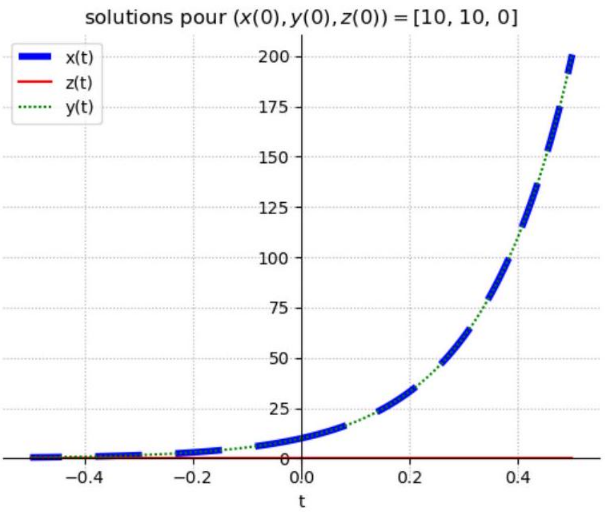
6. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que :

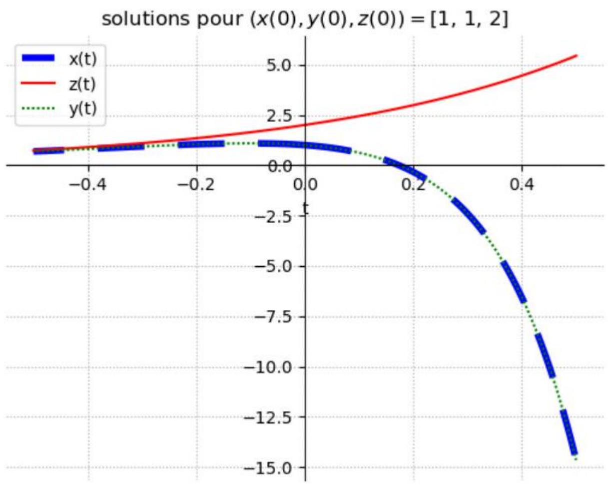
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \left(\left(x_0 - y_0\right) t + z_0 + \frac{1}{2}\left(x_0 - y_0\right)\right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}\left(x_0 + y_0\right) - z_0\right) e^{6t} \\ y(t) = \left(\left(x_0 - y_0\right) t + z_0 + \frac{1}{2}\left(y_0 - x_0\right)\right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}\left(x_0 + y_0\right) - z_0\right) e^{6t} \\ z(t) = \left(\left(x_0 - y_0\right) t + z_0\right) e^{2t} \end{cases}$$

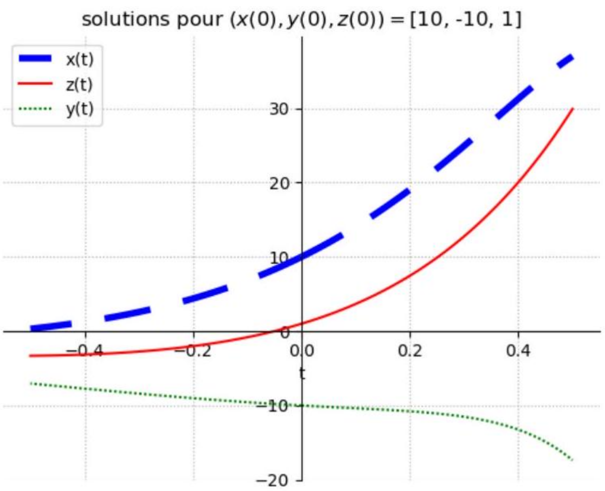
7. Justifier la conjecture faite à la question 5.

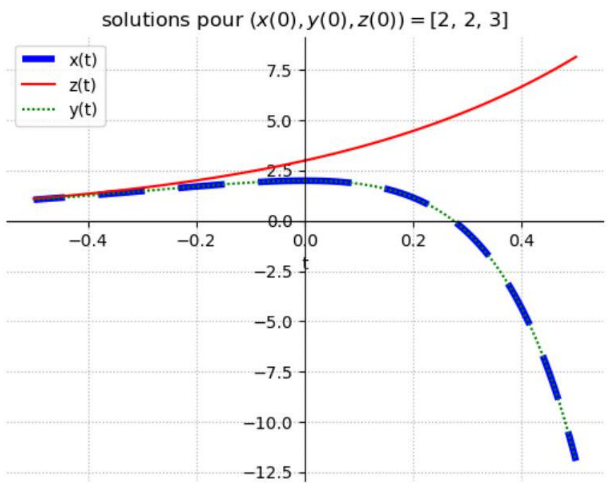

solutions pour $(x(0), y(0), z(0)) = [0, 10, 10]$
x(t)
z(t)
y(t)
t


solutions pour $(x(0), y(0), z(0)) = [10, 0, 10]$
x(t)
z(t)
y(t)
t


solutions pour $(x(0), y(0), z(0)) = [10, 10, 0]$
x(t)
z(t)
y(t)
t


solutions pour $(x(0), y(0), z(0)) = [1, 1, 2]$
x(t)
z(t)
y(t)
t


solutions pour $(x(0), y(0), z(0)) = [10, -10, 1]$
x(t)
z(t)
y(t)
t


solutions pour $(x(0), y(0), z(0)) = [2, 2, 3]$
x(t)
z(t)
y(t)
t