FEUILLE D'EXERCICES

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

EXERCICE 7.1. Densité de probabilité

Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité.

1. $f(t) = \begin{cases} 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(t) = \dfrac{1}{2(1+|t|)^2}$
4. $f(t) = \lambda |t| e^{-\lambda t^2}$

EXERCICE 7.2. Densité avec un paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction suivante :

$$f(t) = \begin{cases} ate^{-at} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le réel a pour que la fonction f définisse une densité de probabilité.

EXERCICE 7.3. Représentation d'une la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par : $f(t) = \begin{cases} 4(1-t)^3 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f définit bien une d.d.p.
2. Tracer l'allure de la courbe de f sur $[-1;2]$.
3. Calculer $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1)$ puis représenter cette probabilité sur la courbe de f.
4. Déterminer la fonction de répartition F_X de X puis tracer l'allure de la courbe de F_X sur $[-1;2]$.

EXERCICE 7.4. Loi de Grumbel

Soient μ et α deux réels tels que $\alpha > 0$.

On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = e^{-e^{\frac{\mu - x}{\alpha}}}$.

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g = G'$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Montrer que G peut être considérée comme la fonction de répartition de X.

EXERCICE 7.5. Transfert de variables à densité
Soit X une variable aléatoire de densité f que l'on suppose continue sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une densité de Y en fonction de f dans les cas suivants :

1. $Y = X + 1$
2. $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$
3. $Y = X^2$
4. $Y = |X|$

EXERCICE 7.6. Montrer qu'une variable est à densité
Soit X une variable aléatoire de densité f_X, définie par $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer F_X la fonction de répartition de X et tracer son allure.
2. Soit $Y = e^X$ et soit F_Y sa fonction de répartition.
   (a) Montrer que $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   (b) Tracer l'allure de F_Y.
   (c) Montrer que Y est une variable aléatoire à à densité puis déterminer une densité f_Y de Y.

EXERCICE 7.7. Moments

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;2])$. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et le calculer.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Montrer que X admet un moment d'ordre 3 et le calculer.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que X admet un moment d'ordre a pour tout $a > 0$.

EXERCICE 7.8. Moments d'une variable à densité
Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln x}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que X^2 n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
3. Montrer que X admet un moment d'ordre $r = \frac{3}{2}$.
4. <u>Un transfert :</u> Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

   Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = g(X)$.

   Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

EXERCICE 7.9. Fonction de répartition d'une variable à densité
Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

1. Montrer que F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
2. Déterminer une densité f de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Reconnaitre la loi de la variable $Y = \ln(1 + e^X)$.

EXERCICE 7.10. Loi de Laplace
Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace de paramètre λ si cette variable admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t|}.$$

1. (a) Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.
   (b) Déterminer la fonction de répartition associée.

2. Soit Y une variable suivant la loi exponentielle de paramètre λ et V une variable indépendante de de Y suivant la loi uniforme (discrète) sur $\{-1; 1\}$.

   On pose $X = VY$.

   (a) Etablir :
   - $\forall x > 0, \quad P(X > x) = \frac{1}{2} P(Y > x)$
   - $\forall x \leqslant 0, \quad P(X \leqslant x) = \frac{1}{2} P(Y \geqslant -x)$.

   (b) Montrer que X suit la loi de Laplace de paramètre λ.

EXERCICE 7.11. Minimum de lois exponentielles indépendantes
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On pose $Y_n = \min(X_1, ..., X_n)$.

On note F la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ et G_n la fonction de répartition de Y_n.

1. Exprimer G_n en fonction de F.

2. En déduire que Y_n suit également une loi exponentielle. En déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

EXERCICE 7.12. Type concours
Après enquête, on estime que le temps de passage en caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T de densité donnée par la fonction $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Pour une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, rappeler l'expression d'une densité de X, donner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Utiliser la question précédente pour montrer que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
   Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3. (a) Démontrer que la fonction de répartition F_T de T est définie par :$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
   (b) Montrer que la probabilité pour que le temps de passage en caisse soit inférieur à à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à à une unité de temps est $\dfrac{2e-3}{2e}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B. Il attend la place du premier d'entre eux qui aura terminé.
   On suppose que les variables aléatoires T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

   (a) Exprimer le temps d'attente M du client C en fonction de T_A et T_B.

   (b) Montrer que la fonction de répartition F_M de M est donnée par :$F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

   (c) Prouver que M est à à densité et expliciter une densité f_M de M.

EXERCICE 7.13. Plus difficile : du cas continue au cas discret

Soit X une variable aléatoire de densité f, définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ la partie entière de X.

1. Déterminer F_X fonction de répartition de X.
2. (a) Que peut-on dire de $Y(\Omega)$?
   (b) Montrer que pour tout k entier relatif : $P(Y = k) = F_X(k+1) - F_X(k)$.
   (c) En déduire que si $k < 0$: $P(Y = k) = 0$ et que si $k \geqslant 0$: $P(Y = k) = e^{-k}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$
   (d) Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.