

VARIABLES CONTINUES

CORRECTIONS

Exercice 1 : Densité de probabilité

Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité.

1. corrigé en classe.

2. 1) f est positive sur \mathbb{R} car f est soit nulle soit positive et 2) f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1 et en 2 car f est soit nulle soit composée de fonctions continues.

3) Par Chasles, comme f est nulle en dehors de $]1;2]$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$.

Or par changement de variable affine

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du.$$

On reconnaît une intégrale de Riemann convergente et le cours nous donne $\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du = 2$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$ converge et vaut 1.

3. 1) f est positive sur \mathbb{R} sans difficulté et 2) f est continue sur \mathbb{R} par thm généraux.

3) f est paire. Par parité et sous réserve de convergence on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt$.

Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt$ cv et vaut $\frac{1}{2}$.

Par changement de variable affine on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$$

On reconnaît une intégrale de Riemann convergente et le cours donne $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2}$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ cv et vaut 1.

CCL : f est bien une d.d.p.

4. 1) et 2) f est positive et continue sur \mathbb{R} .

3) f est paire et sous réserve de convergence, par parité on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} \lambda |t| e^{-\lambda t^2} dt = \int_0^{+\infty} 2\lambda t e^{-\lambda t^2} dt$.

Montrons que $\int_0^{+\infty} 2\lambda t e^{-\lambda t^2} dt$ CV et vaut 1.

Soit $A \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^A 2te^{-\lambda t^2} &= \left[-e^{-\lambda t^2}\right]_0^A \\ &= 1 - e^{-\lambda A^2}\end{aligned}$$

On a évidemment $e^{-\lambda A^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t^2} dt$ CV et vaut 1.

CCL : f est bien une d.d.p.

Exercice 2 : Densité avec paramètre

On cherche $a \in \mathbb{R}$ de sorte que $f(t) = \begin{cases} ate^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une ddp.

1) pour que f soit positive nous devons avoir $a \geq 0$.

2) f est bien continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 car f est soit nulle soit composée de fonctions continues.

3) Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ cv et déterminons sa valeur.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} ae^{-at} t dt \text{ car } f \text{ est nulle sur }]-\infty; 0].$$

Soit $A > 0$.

En posant $\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v' = ae^{-at} & v = -e^{-at} \end{cases}$, on a u et v de classes \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc par IPP on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A ae^{-at} dt &= \left[-te^{-at}\right]_0^A + \int_0^A e^{-at} dt \\ &= Ae^{-aA} + \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^A \\ &= Ae^{-aA} + \frac{1}{a}(1 - e^{-Aa}) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \text{ car } \begin{cases} Ae^{-aA} \rightarrow 0 \\ e^{-Aa} \rightarrow 0 \end{cases} \text{ par c.c.}\end{aligned}$$

On a donc montré que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ cv et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{a}$.

Ccl : f est une ddp $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$.

Exercice 3 : Représentation de la fonction de répartition

Corrigé en cours.

Exercice 4 : Loi de Grumbel

Soient μ et α deux réels tels que $\alpha > 0$.

- La fonction $G : x \mapsto e^{-e^{\frac{\mu-x}{\alpha}}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} par composition de fonctions elles-mêmes dérivables sur \mathbb{R} .

Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} est (C^0) (continue) sur \mathbb{R} .

Donc G vérifie les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable à densité X .

De plus, si on note $g = G'$ alors g est une densité de X .

Par calculs on trouve que $g : t \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\mu-t}{\alpha}} e^{-e^{\frac{\mu-t}{\alpha}}}$ est une densité de probabilité de X .

- Montrons que G est la fonction de répartition de X :

Puisque g est une ddp de X on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt.$$

Soit $B < 0$:

$$\begin{aligned} \int_B^x g(t) dt &= [G(t)]_B^x \quad \text{car } g = G' \text{ donc } G \text{ est une primitive de } g \\ &= G(x) - G(B) \end{aligned}$$

$$\text{Or } G(B) = e^{-e^{\frac{\mu-B}{\alpha}}} \text{ et } \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{\mu-B}{\alpha} = +\infty \Rightarrow \lim_{B \rightarrow -\infty} e^{\frac{\mu-B}{\alpha}} = +\infty \Rightarrow \lim_{B \rightarrow -\infty} e^{-e^{\frac{\mu-B}{\alpha}}} = 0 \Rightarrow \lim_{B \rightarrow -\infty} G(B) = 0.$$

Par conséquent

$$F_X(x) = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^x g(t) dt = G(x).$$

$$\text{Ccl: } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = G(x)}.$$

Exercice 5 :

On suppose X de densité f et on suppose f continue sur \mathbb{R} .

Par conséquent, F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} puisque dérivable et de dérivée $F_X' = f$ continue sur \mathbb{R} .

Lors de chacun des transferts ci-dessous nous obtenons $F_Y(y) = F_X(\varphi(y))$ où φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Ainsi la fonction de répartition F_Y est de classe \mathcal{C}^1 par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

($\mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$) donc F_Y est également continue sur \mathbb{R} .

La fonction de répartition F_Y vérifie les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

Ccl : Y est une variable à densité et on trouve une ddp f_Y de Y en dérivant F_Y (comme composée de fonctions).

$$1. Y = X + 1 \Rightarrow F_Y(y) = F_X(y-1) \Rightarrow f_Y(t) = f(t-1).$$

$$2. Y = 2X \Rightarrow F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow f_Y(t) = \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{2}\right).$$

$$3. Y = -X \Rightarrow F_Y(y) = 1 - F_X(-y) \Rightarrow f_Y(t) = f(-t).$$

$$4. Y = X^2 \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{f(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$5. Y = |X| \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(y) - F_X(-y) & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) + f(-t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Exercice 6 :

$$1. X \text{ est une VAD de d.d.p. } f_X \text{ donc } F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

1er cas $x \leq 0$:

Soit $B < x$.

$$\int_B^x f(t) dt = \int_B^x 2e^{2t} dt = [e^{2t}]_B^x = e^{2x} - e^{2B}$$

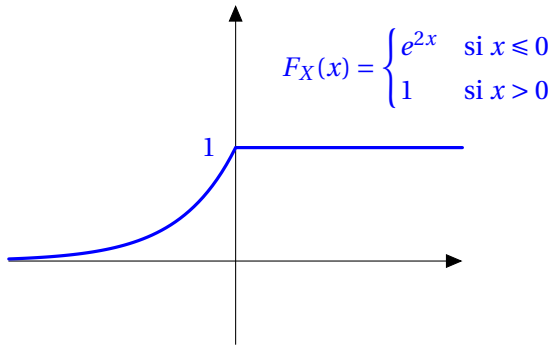
$$\text{On a évidemment } e^{2B} \xrightarrow{B \rightarrow -\infty} 0 \Rightarrow F_X(x) = e^{2x}.$$

2ème cas $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \text{ car } f \text{ est nulle sur } [0, +\infty[\text{ et que } f \text{ est une d.d.p.}$$

$$\underline{\text{BILAN}}: F_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Allure de F_X :



2. Soit $Y = e^X$ et soit F_Y sa fonction de répartition.

(a) Partant de la définition de F_Y : $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y)$

1er cas $y \leq 0$: l'événement $(e^X < y)$ est impossible car $e^X > 0$ (une exponentielle est toujours strictement positive).

$$\Rightarrow F_Y(y) = 0.$$

2ème cas $y > 0$:

Partant de $F_Y(y) = P(e^X \leq y)$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \ln y) && \text{car } \ln \text{ est strict. croissante} \\ &= F_X(\ln y) && \text{par déf. de } F_X \end{aligned}$$

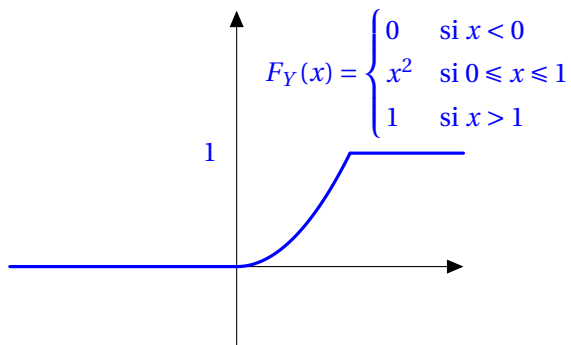
Or on sait que $F_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ donc :

$$\text{- ou bien } 0 < y \leq 1 \Leftrightarrow \ln y \leq 0 \text{ et donc } \Rightarrow F_X(\ln y) = e^{2 \ln y} = y^2 \Rightarrow F_Y(y) = y^2.$$

$$\text{- ou bien } y > 1 \quad \ln y > 0 \text{ et donc } \Rightarrow F_X(\ln y) = 1 \Rightarrow F_Y(y) = 1.$$

$$\underline{\text{BILAN}}: F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y^2 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

(b) Allure de F_Y :



(c) Il s'agit de montrer que F_Y est :

- une fonction continue sur \mathbb{R}
- de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf évent. en un nbre fini de point.

Rmq: même si le graphique suggère que F_Y est bien continue sur \mathbb{R} . Il faut le démontrer.

- Sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ F_Y est de classe \mathcal{C}^∞ (car elle est polynomiale sur chaque morceaux).

$$\begin{aligned} \text{- En } 0 : & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0 \\ F_Y(0) = 0 \end{cases} & \Rightarrow F_Y \text{ est continue en } 0. \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \end{cases} \\ \text{- En } 1 : & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ F_Y(1) = 1 \end{cases} & \Rightarrow F_Y \text{ est continue en } 1. \\ & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : F_Y vérifie les critères d'une fonction de répartition d'une VAD donc Y est bien une VAD.

$$\text{De plus, } f_Y = F'_Y \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \text{ et en dérivant on a } f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t & \text{si } 0 < t < 1. \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On peut ajouter n'importe quelle valeur aux points $t = 0$ et $t = 1$ et on obtient une d.d.p de Y :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 7 : Moments

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1; 2])$. Mq. X admet un moment d'ordre 2 :

D'après le théorème de transfert, on s'intéresse à la nature l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt$ avec $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \in [-1; 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

D'après Chasles et comme f est nulle en dehors de $[-1; 2]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-1}^2 t^2 \frac{1}{3} dt$$

De plus :

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 t^2 dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2^3 - (-1)^3}{3} \right) = \frac{9}{9} = 1.$$

Conclusion : X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = 2$.

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Mq X admet un moment d'ordre 3.

D'après le théorème de transfert, on s'intéresse à la nature l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} t^3 f(t) dt$ avec $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$.

D'après Chasles et comme f est nulle en dehors de $] -\infty; 0]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^3 f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$$

Soit $A > 0$ on pose $\begin{cases} u' = e^{-t} & \Rightarrow u = -e^{-t} \\ v = t^3 & \Rightarrow v' = 3t^2 \end{cases}$ u, v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; +\infty[$, donc par IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^A t^3 e^{-t} dt &= [-t^3 e^{-t}]_0^A - \int_0^A -3t^2 e^{-t} dt \\ &= -A^3 e^{-A} + 3 \int_0^A t^2 e^{-t} dt \end{aligned}$$

On peut refaire deux IPP ou alors on peut remarquer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ est l'intégrale définissant le moment d'ordre 2 de la variable X .

Or $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc X admet un moment d'ordre 2.

Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ cv et en faisant $A \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} -A^3 e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_0^A -t^2 e^{-t} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} E(X^2) \end{cases} \quad \text{par c.c.} \quad \text{et donc} \quad \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt \text{ cv}$$

Ce qui montre que X admet un moment d'ordre 3.

De plus, d'après la formule de K-H, on a : $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = 2$.

Par conséquent

$$E(X^3) = 3 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt \Rightarrow E(X^3) = 6.$$

3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Mq. X admet un moment d'ordre a pour tout $a > 0$.

De la même manière on étudie l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^a| f(t) dt$ qui d'après Chasles revient à étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$.

On remarquera que cette intégrale est impropre uniquement en $+\infty$.

Par ailleurs $t^2 \times t^a e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par c.c. puisque $t^2 \times t^a e^{-t} = t^{a+2} e^{-t}$.

On en déduit donc que $t^a e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente.

Donc d'après le critère de négligeabilité, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$ cv.

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt = \int_0^1 t^a e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^a e^{-t} dt$ est cv comme somme d'une intégrale classique et d'une intégrale cv.

Conclusion : X admet un moment d'ordre a pour tout $a > 0$.

Exercice 8 : Moments d'une variable à densité

Corrigé en classe.

Exercice 9 : Fonction de répartition d'une variable à densité

Soit F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

1. F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité car :

- F est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} par thm généraux.
- F est continue (car dérivable) sur \mathbb{R}
- Par ailleurs elle est croissante sur \mathbb{R} : en effet, $F'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$.
- $F(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^x$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 1$.

Conclusion : la fonction F vérifie les conditions d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire.

2. Soit X admettant F pour fonction de répartition. D'après la question précédente X admet pour densité $f = F'$.

Conclusion : $f : t \mapsto \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

3. Mq. X admet une espérance.

On s'intéresse à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$.

On remarque que si on pose $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ alors

$$f(-t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{1}{e^t e^{-2t} (e^t + 1)^2} = \frac{1}{e^{-t} (1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t).$$

Donc f est paire et donc $t \mapsto |t|f(t)$ est paire.

Etudions la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2} dt$.

On remarque $\frac{te^t}{(1+e^t)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} te^{-t}$ et on a déjà vu que $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ cv (car c'est l'intégrale définissante $E(T)$ pour $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$).

Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2} dt$ cv et par parité l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2} dt$ cv.

Par conséquent X admet une espérance.

De plus par parité de f on en déduit que $t \mapsto tf(t)$ est impaire et comme on a déjà montré que $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ cv on en déduit par imparité que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = 0$.

Conclusion : X admet une espérance et vaut 0.

4. Reconnaître la loi de la variable $Y = \ln(1 + e^X)$.

Vu que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ on en déduit que $e^X(\Omega) =]0; +\infty[$ et donc que $Y(\Omega) =]0; +\infty[$.

Déterminons $F_Y(x) = P(Y \leq x)$:

1er cas : $x \leq 0$

$F_Y(x) = 0$ car $Y(\Omega) =]0; +\infty[$.

2ème cas : $x > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(\ln(1 + e^X) \leq x) \\ &= P(1 + e^X \leq e^x) \\ &= P(e^X \leq e^x - 1) \\ &= P(X \leq \ln(e^x - 1)) \\ &= F_X(\ln(e^x - 1)) \\ &= \frac{e^{\ln(e^x - 1)}}{e^x - 1} \\ &= \frac{1 + e^{\ln(e^x - 1)}}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= e^{-x}(e^x - 1) \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Par conséquent : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$

Conclusion: on reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, et donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.