

# COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

## Exercices d'application directe

### EXERCICE 3.1. Sommes doubles

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$a. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i-j) \quad b. \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \quad c. \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{i+j}}{i!j!} \quad d. \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j}{i!j!}$$

### EXERCICE 3.2. Lois marginales via loi de couple - "petit" support

La loi conjointe du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$y \in Y(\Omega)$	0	1	2
$x \in X(\Omega)$			
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de couple.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Calculer  $E(X), E(Y)$ .

### EXERCICE 3.3. Lois marginales via loi du couple - support fini

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires telles que :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(Y = -1) = \frac{2}{3}, P(Y = 2) = \frac{1}{3} \text{ et } P((X = -1) \cap (Y = -1)) = \lambda \text{ où } \lambda \text{ est un réel.}$$

1. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .
2. Déterminer un encadrement de  $\lambda$ .
3. Déterminer  $E(X), E(Y), E(X^2)$  et  $E(Y^2)$ . Que dire de  $X$  ?

### EXERCICE 3.4. Lois marginales via loi du couple - support infini

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telles que la loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^*, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{3^{i+j+1}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer le réel  $a$  de sorte que l'on définisse une loi de couple.
2. Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$ .
3. Montrer que  $X$  et  $Y$  admettent une espérance et déterminer  $E(X)$  et  $E(Y)$ .

**EXERCICE 3.5. Produit de variables indépendantes**

On considère deux variables aléatoires indépendantes  $U$  et  $Y$ . On suppose que  $U$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  et la loi de  $Y$  est donnée par

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}.$$

Par la suite on notera  $T = (2U - 1)Y$ .

1. Montrer que  $Y + 1$  suit une loi géométrique dont on précisera la paramètre.  
En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .
2. Montrer que  $T$  admet une espérance et la calculer.

**EXERCICE 3.6. Covariance et stabilité de lois de Poisson indépendantes**

On considère trois variables aléatoires indépendantes  $U, V$  et  $W$  telles que  $U$  et  $W$  suivent la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $V$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\mu$ .

On note  $X = U + V$  et  $Y = V + W$ .

1. Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
2. Montrer que  $\text{Cov}(X, Y)$  existe et la calculer.
3. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et de  $Y$ .

**EXERCICE 3.7. Minimum de deux loi géométriques indépendantes**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que celles-ci suivent des lois géométriques de paramètres  $p$ .

On pose  $Z = \min(X, Y)$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Ecrire un script Python simulant la variable aléatoire  $Z$ .
2. Calculer  $P(X > n)$ .
3. Calculer  $P(Z > n)$  puis en déduire  $P(Z = n)$ . Quelle est la loi de  $Z$  ?
4. Les variables  $X$  et  $Z$  sont-elles indépendantes ?

**EXERCICE 3.8. Indépendance mutuelle**

Soit  $n \geq 2$ . On considère une urne  $U$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule **avec remise** de la boule dans l'urne  $U$ . Soit  $k \geq 1$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable égale au nombre d'obtentions de la boule numéro  $i$  au cours des  $k$  premiers tirages.

1. Donner la loi de  $X_i$  et rappeler l'espérance de  $X_i$ .
2. Les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont elles mutuellement indépendantes ?
3. Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tels que  $i \neq j$ .
  - (a) Déterminer la loi de la variable  $X_i + X_j$
  - (b) En déduire la covariance du couple  $(X_i, X_j)$

**EXERCICE 3.9. Suite de variables de Bernoulli indépendantes**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes.

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $X_n$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on note

$$Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

1. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $Y_n$ , son espérance et sa variance.
2. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $(Y_n, Y_{n+1})$  et  $Cov(Y_n, Y_{n+1})$ .
3. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout entier  $k \geq 2$ , la loi de  $(Y_n, Y_{n+k})$ .  
Les variables  $Y_n$  et  $Y_{n+k}$  sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer l'espérance et la variance de  $T_n$ .

**EXERCICE 3.10. Suite de variables de Poisson indépendantes**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes.

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la variable  $X_n$  suit la loi de Poisson de paramètre 1 et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Quelle est la loi de  $S_n$  ? En déduire son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $S_n^*$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P(S_n^* \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ .

**Exercices en contexte****EXERCICE 3.11. Tirages successifs avec remise**

Une urne contient 4 boules blanches et 12 boules rouges. On effectue des tirages successifs avec remise dans l'urne. Après chaque tirage, on ajoute trois boules de la même couleur que celle qui a été tirée.

On note  $X_n$  la variable aléatoire valant 1 si la boule prélevée au  $n$ -ième tirage est rouge et 0 sinon, et  $S_n$  le nombre de boules rouges tirées après  $n$  tirages.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ , son espérance, sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de  $X_2$  sachant  $[X_1 = 0]$ . En déduire la loi conjointe du couple  $(X_1, X_2)$ , puis celle de  $X_2$ .  
 $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?
3. Soit  $k \in [0, n]$ . Déterminer  $P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1)$ .  
En déduire que  $P(X_{n+1} = 1) = \frac{12 + 3E(S_n)}{16 + 3n}$ .
4. Exprimer  $E(S_{n+1})$  en fonction de  $E(S_n)$ .
5. Montrer que  $E(S_n) = \frac{3}{4}n$ , puis en déduire la loi de  $X_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**EXERCICE 3.12. Un jeu de tir**

Soit  $p \in ]0; 1[$ . On note  $q = 1 - p$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère  $n$  joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité  $p$  d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire  $Z$  égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de  $X$ . Rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que  $Z$  suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.  
On note  $Y = Z - X$ .
3. Que représente la variable aléatoire  $Y$  ? Déterminer la loi de  $Y$ .
4. (a) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?  
(b) Calculer la covariance du couple  $(X, Y)$ .

**EXERCICE 3.13. Tirages successifs sans remise**

Une urne contient 2 boules blanches et  $n - 2$  boules rouges ( $n \geq 2$ ).

On effectue dans cette urne des tirages **sans remise** jusqu'à avoir tiré deux boules blanches.

On note :

- $X$  le rang d'apparition de la première boule blanche,
- $Y$  le rang d'apparition de la seconde boule blanche.

1. (a) Déterminer le support de  $X$  et de  $Y$ .  
(b) Que vaut  $P((X = i) \cap (Y = j))$  si  $i \geq j \geq 2$  ?  
(c) Montrer que si  $1 \leq i < j$  :  $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{2}{n(n-1)}$ .
2. En déduire les lois marginales du couple  $(X, Y)$ .

**EXERCICE 3.14. Loi de Poisson conditionnée**

On considère une entreprise de construction produisant des objets. On suppose que la probabilité qu'un objet construit soit défectueux est 0,1. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 20$ . On considère la variable aléatoire  $X$  représentant le nombre d'objets défectueux produits en une heure. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise.

1. (a) Proposer une ligne de commande Python qui renvoie une simulation de la variable  $X$ .  
(b) Ecrire une fonction Python d'en-tête `def esp_X(N)` : qui prend un nombre entier  $N \geq 1$  et renvoie une estimation de l'espérance de  $Y$  sur un échantillon de  $N$  réalisations de la variable  $X$ .
2. Rappeler la loi de  $Y$  ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de  $Y$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = n)$ .
4. En déduire que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre 2.

## Exercices plus difficiles

### EXERCICE 3.15. Une loi de couple un peu compliquée

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif et  $b \in ]0, 1[$ . On considère un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$ , dont la loi de probabilité est donnée par :  $P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} 0, & \text{si } j > i; \\ \frac{a^i e^{-a} b^j (1-b)^{i-j}}{j!(i-j)!}, & \text{sinon.} \end{cases}$

- Déterminer la loi de  $X$ , ainsi que son espérance et sa variance.
- Déterminer la loi de  $Y$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- En s'appuyant sur le système complet d'événements  $([Y = j], j \in \mathbb{N})$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z = X - Y$ .  
 $Y$  et  $Z$  sont-elles indépendantes ?
- En déduire  $\rho(X, Y)$ .

### EXERCICE 3.16. Variables indépendantes de même loi

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

- Montrer que les couples  $(X, Y)$  et  $(Y, X)$  ont même loi.
- En déduire que  $P(X > Y) = P(X < Y)$ . *Indication : utiliser la formule des probabilités totales.*
- Déterminer une relation entre  $P(X = Y)$  et  $P(X > Y)$ .

### EXERCICE 3.17. Matrices aléatoires

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes, de même loi et à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$  et on note  $A$  l'événement : "la matrice  $M$  est inversible".

- Montrer que  $P(A) = P(X \neq Y)$ .
- En déduire que  $P(A) = 1 - \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)^2$ .
- On suppose que  $X$  et  $Y$  suivent la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ . Déterminer  $P(A)$ .
- On suppose que  $X$  et  $Y$  suivent la loi géométrique de paramètre  $p$ . Déterminer  $P(A)$ .

### EXERCICE 3.18. Trois lois uniformes indépendantes

Soient  $X, Y, Z$  trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes le loi uniforme discrète sur  $[[1; n]]$ .

- A l'aide de la formule de probabilités totales :

(a) Montrer que :  $\forall k \in [[2; n+1]], \quad P(X+Y = k) = \frac{k-1}{n^2}$ .

(b) Montrer que :  $\forall k \in [[n+2; 2n]], \quad P(X+Y = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$ .

(c) En déduire que  $P(X+Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$ .

- (a) Montrer que la variable aléatoire  $T = n+1 - Z$  suit la loi uniforme discrète sur  $[[1; n]]$ .  
(b)  $T$  est-elle indépendante de  $X$  et de  $Y$  ?  
(c) En faisant intervenir la variable  $T$  et en utilisant la première question, déterminer la probabilité :

$$P(X+Y+Z = n+1).$$

**Type concours****EXERCICE 3.19. Un premier exemple de "chaîne de Markov"**

On considère la matrice  $M$  définie par  $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et les trois vecteurs de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  suivants :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice  $M$  est-elle inversible ?
2. Calculer  $MV_1, MV_2$  et  $MV_3$  en fonction de  $V_1, V_2$  et  $V_3$ .

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

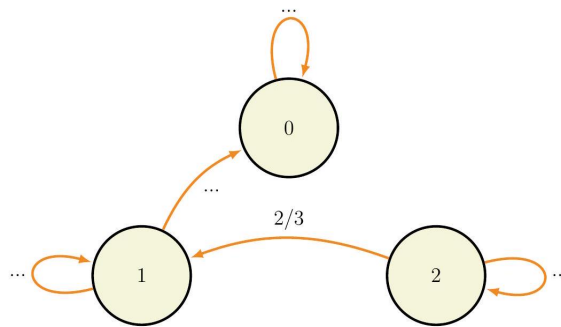
- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier  $i$  supérieur ou égal à 1, on note  $B_i$  (respectivement  $R_i$ ) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du  $i^{\text{ème}}$  tirage".

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $X_n$  le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  tirage et on pose  $X_0 = 2$ .

On introduit la matrice colonne  $U_n = \begin{pmatrix} P[X_n = 0] \\ P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \end{pmatrix}$ .

3. (a) Déterminer pour tout entier naturel  $n$ , l'ensemble des valeurs prises par la variable  $X_n$  (on distinguera les trois cas :  $n = 0, n = 1$  et  $n \geq 2$ ).
- (b) Recopier et compléter en justifiant le diagramme de transition ci-contre de la suite  $(X_n)$  (pour  $n \geq 2$ ). On précisera notamment à quelles probabilités conditionnelles correspondent les valeurs sur les flèches du diagramme.



- (c) En utilisant la formule des probabilités totales avec un système complet d'évènements construit avec la variable  $X_n$ , montrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2).$$

Montrer de même qu'on a :

$$U_{n+1} = MU_n.$$

Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

- (d) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ , la relation suivante :

$$U_n = V_1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

- (e) Donner la loi de la variable  $X_n$ .

4. Calculer  $E(X_n)$ , espérance de  $X_n$ , ainsi que sa limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
5. Recopier et compléter la fonction suivante permettant de représenter graphiquement la trajectoire de la v.a.  $X_n$ .

```
1 def traj_X(n):
2     X = (n+1)*[0]
3     X[0]= 2
4     for i in range (1, n+1):
5         if X[i-1] == 0 :
6             X[i] = .....
7         if X[i-1] == 1 :
8             X[i] = .....
9         if X[i-1] == 2 :
10            X[i] = ...
11     N = [k for k in range(n+1)]
12     plt.grid()
13     plt.plot(N, X, '.')
14     plt.show()
```