FEUILLE D'EXERCICES : COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

CORRECTION

Exercices d'application directe

Exercice 1 : Sommes doubles

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i-j) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i-j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i-\sum_{j=0}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i-\sum_{i=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= (n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}(n+1)\\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Notons que dans cette somme double on a $i \leqslant j$, donc en intervertissant les symboles Σ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j+\sum_{j=1}^{n} 1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\\
&= \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{i+j}}{i!j!} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2^i}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^j}{j!}\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2^i}{i!}e^2\\
&= e^2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2^i}{i!}\\
&= e^2\times e^2\\
&= e^4.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{i!j!} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{j!}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}e^i\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^i}{i!}\\ &= e^e.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Lois marginales via loi de couple - "petit" support
Corrigé en cours.

Exercice 3 : Lois marginales via loi du couple - support fini
X et Y sont deux variables aléatoires telles que :
$P(X=-1)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$, $P(Y=-1)=\dfrac{2}{3}$, $P(Y=2)=\dfrac{1}{3}$ et $P\big((X=-1)\cap(Y=-1)\big)=\lambda$ où λ est un réel.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

loi du couple (X,Y)	-1	2	loi de X
-1	λ	$\frac{1}{2}-\lambda$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{2}{3}-\lambda$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\lambda$	$\frac{1}{2}$
loi de Y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

2. Pour que toutes les probabilités du tableau soient positives il faut et il suffit que toutes ces conditions soient vérifiées:

   - $\lambda \geqslant 0$
   - $\frac{1}{2}-\lambda \geqslant 0 \iff \lambda \leqslant \frac{1}{2}$
   - $\frac{2}{3}-\lambda \geqslant 0 \iff \lambda \leqslant \frac{2}{3}$
   - $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\lambda \geqslant 0 \iff \lambda \geqslant \frac{1}{6}$

   Conclusion : on trouve donc l'encadrement suivant $\boxed{\frac{1}{6} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}}$.

3. A l'aide des lois marginales on trouve

   - $E(X) = -1 \times P(X=-1) + 1 \times P(X=1) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$
   - $E(Y) = -1 \times P(Y=-1) + 2 \times P(Y=2) = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} = 0$
   - $E(X^2) = (-1)^2 \times P(X=-1) + 1^2 \times P(X=1) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ (thm de transfert)
   - $E(Y^2) = (-1)^2 \times P(Y=-1) + 2^2 \times P(Y=2) = \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = 2$ (thm de transfert)

Exercice 4 : Lois marginales via loi du couple - support infini
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que la loi du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^*,\quad P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\frac{a}{3^{i+j+1}},\quad a\in\mathbb{R}.$$

1. On détermine $a\in\mathbb{R}$ grâce à la propriété

$$\sum\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} P((X=i)\cap(Y=j))=1.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}P((X=i)\cap(Y=j)) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{a}{3^{i+j+1}}\\ &= \frac{a}{3}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j\\ &= \frac{a}{3}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\times\underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}_{=\frac{1}{2}}\\ &= \frac{a}{6}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\\ &= \frac{a}{12}.\end{aligned}$$

Ccl : On définit ainsi une loi de couple $\Longleftrightarrow$ $\boxed{a=12}$.

2. Loi de X : D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\big((Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}^*}$ on a :

$$\begin{aligned}\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=i) &= \sum_{j=1}^{+\infty}P((X=i)\cap(Y=j))\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{12}{3^{i+j+1}}\\ &= \frac{12}{3^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j\\ &= \frac{4}{3^i}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{2}{3^i}.\end{aligned}$$

Ccl : la loi de X est donnée par $\boxed{\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=i)=\frac{2}{3^i}.}$

La loi du couple (X,Y) étant symétrique, càd $P((X=i)\cap(Y=j))=P((X=j)\cap(Y=i))$, on en déduit par un raisonnement analogue que la loi de Y est donnée par $\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*,\quad P(Y=j)=\frac{2}{3^j}}$.

Remarque : on peut constater que X et Y suivent la même loi ou sont de même loi.

3. Montrons que X admet une espérance.

Il s'agit de montrer que la série $\sum_{i\geqslant 1} iP(X=i)$ converge absolument. Tout les termes de la séries étant positifs, il suffit de démontrer que cette série converge.

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant1} iP(X=i) &= \sum_{i\geqslant1} i\frac{2}{3^i}\\ &= \frac{2}{3}\sum_{i\geqslant1} i\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée de raison $q=\frac{1}{3}\in]-1;1[$, donc la série converge.

Par conséquent la variable X admet une espérance.

De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) \\ &= \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{(1-1/3)^2} \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{3^2}{2^2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ccl : X admet une espérance et $E(X) = \frac{3}{2}$. De plus comme X et Y ont même loi alors Y admet une espérance et $E(Y) = E(X) = \frac{3}{2}$.

Exercice 5 : Produit de variables indépendantes

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et Y. On suppose que U suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi de Y est donnée par

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n}.$$

Par la suite on notera $T = (2U-1)Y$.

1. Montrons que $Y+1$ suit une loi géométrique dont on précisera la paramètre.

   Soit $X = Y+1$. D'après la définition de la loi de Y on a :

   • $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   • Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X=k) = P(Y=k-1) \Rightarrow P(X=k) = \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-(k-1)}$..

   On reconnait une loi géométrique de paramètre $p = 1-\frac{1}{e}$.

   Ccl : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$.

   On en déduit :

   • $E(X) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{e}} \quad \Rightarrow \quad E(X) = \dfrac{e}{e-1}$.

   • $V(X) = \dfrac{\frac{1}{e}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \dfrac{1}{e\frac{(1-e)^2}{e^2}} \quad \Rightarrow \quad V(X) = \dfrac{e}{(e-1)^2}$.

   On en déduit l'espérance et la variance de Y à l'aide de l'expression : $Y = X-1$:

   • Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = E(X)-1 = \dfrac{e}{e-1} - 1 \Rightarrow \boxed{E(Y) = \dfrac{1}{e-1}}$.

   • Par propriété de la variance : $V(Y) = V(X) \Rightarrow \boxed{V(Y) = \dfrac{e}{(e-1)^2}}$.

2. On a : $T = (2U-1)Y$ donc $T = 2UY - Y$.

   Or on sait que U et Y sont indépendantes et admettent chacune une espérance. Donc on en déduit que UY admet une espérance et donc par linéarité que $T = 2UY - Y$ admet une espérance.

   De plus, linéarité de l'espérance et par indépendance des variables U et Y on a :

$$E(T) = E(2UY - Y) = 2E(U)E(Y) - E(Y) = 2 \times \frac{1}{2}E(Y) - E(Y) = E(Y) - E(Y) = 0$$

   Ccl : $\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = 0}$.

Exercice 13 : Tirages successifs sans remise
Soit $n \geqslant 2$ fixé.

1. (a) Support de X : on peut tirer la première boule blanche au 1er, 2ème, ..., $(n-1)$-ème tirage, donc $\boxed{X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]}$

   Support de Y : on peut tirer la deuxième boule blanche au 2ème, 3ème, ..., n-ème tirage, donc $\boxed{Y(\Omega) = [\![2; n]\!]}$.

   (b) On ne peut pas tirer la 2ème boule blanche avant la première donc, pour $i \geqslant j \geqslant 2$, la probabilité $P\big((X = i) \cap (Y = j)\big)$ est nulle.

   Ccl : $\boxed{\forall i \geqslant j \geqslant 2, \quad P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = 0}$.

   (c) Soient i, j deux entiers tels que $1 \leqslant i < j$:

   Pour calculer $P((X = i) \cap (Y = j))$ on calcule séparément $P(X = i)$ puis $P_{(X=i)}(Y = j)$:

   On introduit les événements B_k : "on tire une boule blanche au k-ème tirage" et R_k : "on tire une boule rouge au k-ème tirage".

   Attention, il n'y a pas indépendance des tirages puisqu'on fait des tirages **avec remise**.

   • On a $(X = i) = R_1 \cap \ldots \cap R_{i-1} \cap B_i$ donc d'après la formule des **probabilités composées** :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P\big(R_1 \cap \ldots \cap R_{i-1} \cap B_i\big) \\ &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times \ldots \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{i-1}}(B_i) \\ &= \frac{\cancel{n-2}}{n} \times \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-i}{\cancel{n-i+2}} \times \frac{2}{\cancel{n-i+1}} \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

   • Si $(X = i)$ est réalisé, cela signifie que dans l'urne il reste $n-i-1$ boules rouges et 1 boule blanche. Ainsi, toujours d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P_{(X=i)}(Y = j) &= P\big(R_{i+1} \cap \ldots \cap R_{j-1} \cap B_j\big) \\ &= \frac{\cancel{n-i-1}}{n-i} \times \frac{\cancel{n-i-2}}{\cancel{n-i-1}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n-j-i-2}}{\cancel{n-j-i-1}} \times \frac{1}{\cancel{n-j-i-2}} \\ &= \frac{1}{(n-i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\big((X = i) \cap (X = j)\big) &= P(X = i) \times P_{(X=i)}(Y = j) \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-i} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

2. D'après les questions précédentes on a la loi de couple suivante :

$$P\big((X = i) \cap (X = j)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geqslant j \geqslant 2 \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \end{cases}$$

   Loi de X : D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\big((Y = j)\big)_{j \in [\![2,n]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1;n-1]\!], \quad P(X=i) &= \sum_{j=2}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)) \\ &= \sum_{j=2}^{i} 0 + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n(n-1)} \\ &= (n-(i+1)+1)\frac{2}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Ccl : la loi de X est donnée par $\boxed{\forall i \in [\![1;n-1]\!], \quad P(X=i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}.}$

Vérifions :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ce qui confirme bien que l'on a bien trouvé une loi de probabilité.

Loi de Y : D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $((X=i))_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![2;n]\!], \quad P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{n-1} P((X=i)\cap(Y=j)) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + \sum_{i=j}^{n-1} 0 \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Ccl : la loi de Y est donnée par $\boxed{\forall i \in [\![2;n]\!], \quad P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.}$

Vérifions :

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n} P(Y=j) &= \sum_{j=2}^{n} \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n}(j-1) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \qquad \text{en posant } k=j-1 \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ce qui confirme bien que l'on a bien trouvé une loi de probabilité.

Exercice 14 : Covariance et stabilité de lois de Poisson indépendantes
On considère trois variables aléatoires indépendantes U, V et W telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre λ et V suit la loi de Poisson de paramètre μ.
On note $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Par indépendance mutuelle (U, V, W) les variables sont indépendantes 2 à 2 donc (U, V) et (V, W) sont indépendantes.

   Ainsi, par stabilité des lois de Poisson indépendantes, on a

$$\begin{cases} U \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \\ V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu) \end{cases} \Longrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu) \quad \text{et} \begin{cases} V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu) \\ W \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \end{cases} \Longrightarrow Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu).$$

2. $cov(X, Y)$ existe car X et Y admettent une variance (loi de Poisson).

   De plus,

$$\begin{array}{rcll} cov(X,Y) & = & cov(U+V, V+W) & \\ & = & \underbrace{cov(U,V)}_{=0} + \underbrace{cov(U,W)}_{=0} + cov(V,V) + \underbrace{cov(V,W)}_{=0} & \text{par indépendance de } (U,V),(U,W) \text{ et } (V \\ & = & cov(V,V) & \\ & = & V(V) & \end{array}$$

   Conclusion : $V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ donc $\boxed{cov(X,Y) = \mu}$.

3. On sait que

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

$$\begin{cases} X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu) \Rightarrow & V(X) = \lambda+\mu \\ Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu) \Rightarrow & V(Y) = \lambda+\mu \end{cases} \Longrightarrow \rho(X,Y) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda+\mu}\sqrt{\lambda+\mu}}.$$

Conclusion : $\boxed{\rho(X,Y) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}}$.

Exercice 15 : Minimum de deux loi géométriques indépendantes
Corrigé en cours.

Exercice 16 : Indépendance mutuelle
Soit $n \geqslant 2$. On considère une urne U contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule **avec remise** de la boule dans l'urne U. Soit $k \geqslant 1$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. X_i est la variable égale au nombre de succès ("tirer la boule i") au cours de k répétitions (les k tirages) d'épreuves de Bernoulli indépendantes (tirer la boule i on ne pas la tirer) de paramètre $\dfrac{1}{n}$ (probabilité de tirer la boule i dans l'urne U).

   Ccl : $\boxed{\mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k, \frac{1}{n}\right) \text{ et } E(X) = \frac{k}{n} \text{ et } V(X) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.

2. Soit $i \neq j$, alors les événements $(X_i = k)$ et $(X_j = 1)$ sont incompatibles car on ne peut tirer k fois la boules i et une fois la boule $j \neq i$ en k tirages.

   Par conséquent $P\big((X_i = k) \cap (X_j = 1)\big) = 0$, ce qui montre que les variables $(X_1, ..., X_n)$ ne sont pas 2 à 2 indépendantes.

   Or l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2.

   Ccl : $\boxed{(X_1, ..., X_n) \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes}}$.

3. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, tels que $i \neq j$.

   (a) **Attention, les variables** $(X_1, ..., X_n)$ **n'étant ni mutuellement indépendantes ni 2 à 2 indépendantes, nous ne pouvons pas utiliser d'argument de stabilité des lois binomiales indépendantes.**
   Néanmoins, déterminons la loi de la variable $X_i + X_j$.
   La variable $X_i + X_j$ est la variable égale au nombre de succès ("tirer la boule numéro i ou j") au cours de k répétitions (les k tirages) d'épreuves de Bernoulli indépendantes (tirer la boulenuméro i ou j on ne pas les tirer) de paramètre $\frac{2}{n}$ (probabilité de tirer la boule numéro i ou j dans l'urne U).
   Ccl : $\boxed{\mathrm{X}_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$.

   (b) D'après le cours on sait que $cov(X, Y) = \dfrac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2}$.
   On a donc :

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= \frac{V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)}{2} \\ &= \frac{\frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - 2 \times \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2} \\ &= \frac{k}{n}\left(1 - \frac{2}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{k}{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) \\ &= -\frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

   Ccl : $\boxed{cov(X_i, X_j) = -\dfrac{k}{n^2}}$.

Exercice 17 : Suite de variables de Bernoulli indépendantes
Corrigé en cours.

Exercice 18 : Suite de variables de Poisson indépendantes
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Par stabilité des lois de Poisson indépendantes on a $S_n \hookrightarrow \mathscr{P}(1 + ... + 1)$.
   Ccl : $S_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n)$, $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

2. Démontrons une propriété générale :

Center et réduire

Soit X admettant une espérance μ et une variance $\sigma^2 > 0$.
On pose :

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Alors $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.
La variable X^* est appelée la *centrée-réduite* de X.

Démonstration :

Par linéarité de l'espérance : $E(X^*) = \dfrac{E(X)-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$.

Par propriété de la variance : $V(X^*) = \dfrac{V(X-\mu)}{\sigma^2} = \dfrac{V(X)}{\sigma^2} = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$.

Ils suffit d'appliquer cette propriété à la variable S_n dont l'espérance vaut $E(S_n) = n$ et la variance vaut $V(S_n) = n$.

Ainsi $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ correspond bien à la centrée-réduite de S_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P(S_n^* \leqslant 0) &= P\left(\tfrac{S_n-n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \\
&= P(S_n - n \leqslant 0) \\
&= P(S_n \leqslant n) \\
&= P\left(\bigcup_{k=0}^{n} P(S_n = k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} \\
&= e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ccl : $\boxed{P(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}}$.

Exercices en contexte

Exercice 19 : Tirages successifs avec remise
Corrigé en cours.

Exercice 20 : Un jeu de tir
Corrigé en cours.

Exercice 21 : Tirages successifs sans remise
Soit $n \geqslant 2$ fixé.

1. (a) Support de X : on peut tirer la première boule blanche au 1er, 2ème, ..., $(n-1)$-ème tirage, donc $\boxed{X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]}$.
   Support de Y : on peut tirer la deuxième boule blanche au 2ème, 3ème, ..., n-ème tirage, donc $\boxed{Y(\Omega) = [\![2; n]\!]}$.

   (b) On ne peut pas tirer la 2ème boule blanche avant la première donc, pour $i \geqslant j \geqslant 2$, la probabilité $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$ est nulle.
   Ccl : $\boxed{\forall i \geqslant j \geqslant 2, \quad P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = 0}$.

   (c) Soient i, j deux entiers tels que $1 \leqslant i < j$:
   Pour calculer $P((X=i)\cap(Y=j))$ on calcule séparément $P(X=i)$ puis $P_{(X=i)}(Y=j)$:

On introduit les événements B_k : "on tire une boule blanche au k-ème tirage" et R_k : "on tire une boule rouge au k-ème tirage".

Attention, il n'y a pas indépendance des tirages puisqu'on fait des tirages **avec remise**.

• On a $(X = i) = R_1 \cap ... \cap R_{i-1} \cap B_i$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P\big(R_1 \cap ... \cap R_{i-1} \cap B_i\big) \\ &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times ... \times P_{R_1 \cap ... \cap R_{i-1}}(B_i) \\ &= \frac{\cancel{n-2}}{n} \times \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \times ... \times \frac{n-i}{\cancel{n-i+2}} \times \frac{2}{\cancel{n-i+1}} \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

• Si $(X = i)$ est réalisé, cela signifie que dans l'urne il reste $n - i - 1$ boules rouges et 1 boule blanche. Ainsi, toujours d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P_{(X=i)}(Y = j) &= P\big(R_{i+1} \cap ... \cap R_{j-1} \cap B_j\big) \\ &= \frac{\cancel{n-i-1}}{n-i} \times \frac{\cancel{n-i-2}}{\cancel{n-i-1}} \times ... \times \frac{\cancel{n-j-i-2}}{\cancel{n-j-i-1}} \times \frac{1}{\cancel{n-j-i-2}} \\ &= \frac{1}{(n-i)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} P\big((X = i) \cap (X = j)\big) &= P(X = i) \times P_{(X=i)}(Y = j) \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-i} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

2. D'après les questions précédentes on a la loi de couple suivante :

$$P\big((X = i) \cap (X = j)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geqslant j \geqslant 2 \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \end{cases}$$

<u>Loi de X :</u> D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\big((Y = j)\big)_{j \in [\![2,n]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1; n-1]\!], \quad P(X = i) &= \sum_{j=2}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{j=2}^{i} 0 + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n(n-1)} \\ &= (n - (i+1) + 1)\frac{2}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> la loi de X est donnée par $\boxed{\forall i \in [\![1; n-1]\!], \quad P(X = i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}.}$

Vérifions :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} n - 1 P(X = i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

<u>Loi de Y :</u> D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $((X=i))_{i\in[[1,n-1]]}$ on a :

$$\begin{array}{rcl}\forall j\in[[2;n]],\quad P(Y=j) & = & \sum_{i=1}^{n-1} P((X=i)\cap(Y=j)) \\ & = & \\ & = & \dfrac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k \\ & = & \dfrac{2}{n(n-1)}\times\dfrac{(n-1)n}{2} \\ & = & 1.\end{array}$$

Exercice 22 : Loi de Poisson conditionnée Corrigé en cours.

Exercices plus difficiles

Exercice 23 : Une loi de couple un peu compliquée
Corrigé en cours.

Exercice 24 : Variables indépendantes de même loi
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Rappelons que X et Y ont même loi signifie que $\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=P(Y=k)$.

   Montrons que : $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^*,\quad P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=P\big((Y=i)\cap(X=j)\big)$.

   Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

$$\begin{array}{rcll}P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) & = & P(X=i)P(Y=j) & \text{par indépendance de } (X,Y) \\ & = & P(Y=i)p(X=j) & \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ & = & P\big((Y=i)\cap(X=j)\big) & \text{à nouveau par indépendance de } (X,Y)\end{array}$$

2. Montrons que : $P(X>Y)=P(X<Y)$.

   D'après la FPT à l'aide du SCE $\big((X=i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{rcll}P(X>Y) & = & \sum_{i=0}^{+\infty} P\big((X>Y)\cap(X=i)\big) & \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} P\big((i>Y)\cap(X=i)\big) & \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} P(i>Y)P(X=i) & \text{par indépendance de } (X,Y) \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} P(i>X)P(Y=i) & \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} P\big((i>X)\cap(Y=i)\big) & \text{à nouveau par indépendance de } (X,Y) \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} P\big((Y>X)\cap(Y=i)\big) & \\ & = & P(Y>X) & \text{d'après la FPT à l'aide du SCE } \big((Y=i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \text{ cette fois}\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcll} P(X=Y) & = & 1-P(X\neq Y) & \\ & = & 1-(P(X<Y)+P(X>Y)) & \\ & = & 1-2P(X>Y) & \text{d'après la question précédente} \end{array}$$

Exercice 25 : Matrices aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, de même loi et à valeurs strictement positives.
On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ et on note A l'événement : "la matrice M est inversible".

1. Rappel : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$.
   Ainsi on a $A=(X^2-Y^2\neq 0)=((X-Y)(X+Y)\neq 0)$.
   Or X et Y sont à valeurs strictement positives ainsi $(X+Y)>0$ et donc A=(X-Y≠ 0).
   Conclusion : $P(A)=P(X\neq Y)$.
2. D'après ce qui précède on a : $P(A)=1-P(X=Y)$ et en appliquant la FPT à l'aide du SCE $((X=k))_{k\in X(\Omega)}$:
$$\begin{array}{rcll} P(X=Y) & = & \displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P_{(X=k)}(Y=k)P(X=k) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P(Y=k)P(X=k) & \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ & = & \displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k)^2 & \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \end{array}$$
   Conclusion : $P(A)=1-\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k)^2$.
3. On suppose que X et Y suivent la loi uniforme sur $\{1,\dots n\}$.
   En appliquant ce qui précède on a :
$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & 1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X=k)^2 \\ & = & 1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \\ & = & 1-\dfrac{1}{n} \end{array}$$
   Conclusion : $P(A)=1-\dfrac{1}{n}$.
4. Si X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p. Alors on a :
$$\begin{array}{rcll} P(A) & = & 1-\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)^2 & \\ & = & 1-\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)}p^2 & \\ & = & 1-p^2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} & \\ & = & 1-p^2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} & \text{changement d'indice } k\leftarrow k-1 \end{array}$$
   Conclusion : $0<q<1$ donc $\boxed{P(A)=1-\dfrac{p^2}{1-q^2}}$.