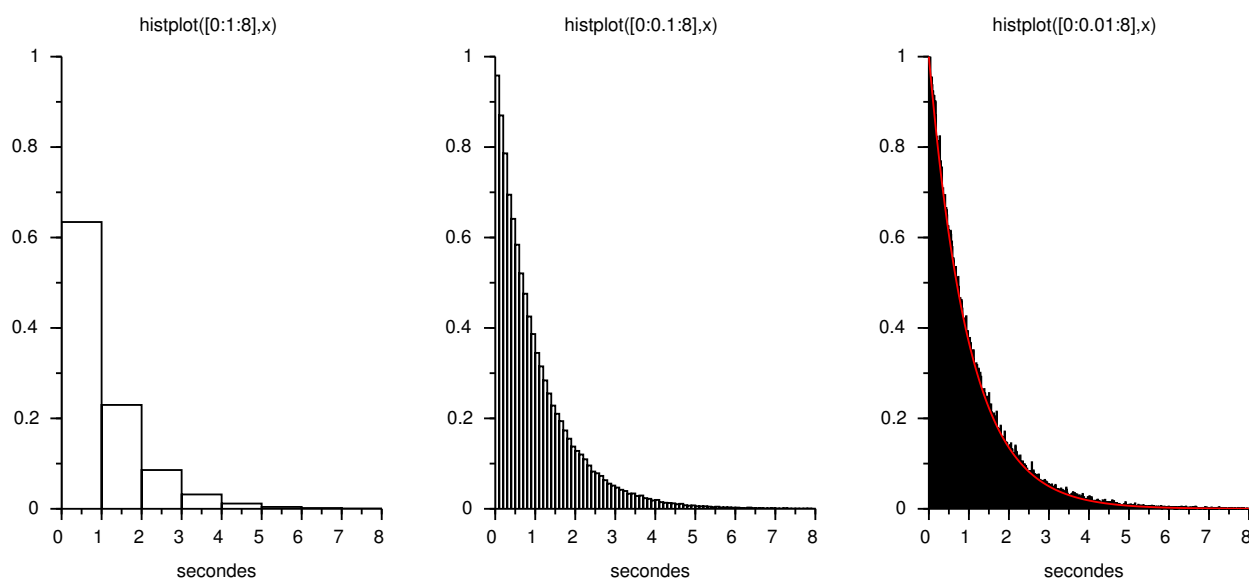


# VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

**Introduction :** Notons  $X$  la variable aléatoire égale à la durée de refroidissement (en secondes) d'une plaque de métal soumis à une source de chaleur de forte intensité. .

Dans la pratique nous ne pouvons nous baser que sur des observations. On observe donc un échantillon "assez grand" de telles plaques toutes identiques et on les soumet dans les mêmes conditions à la même source de chaleur. On représente les résultats sous forme de 3 histogrammes de fréquences de cet échantillon :



Si on note  $X_0, X_1, X_2$  les variables aléatoires dont les lois sont données respectivement par les histogrammes 1, 2 et 3, alors on peut dire que  $X_0, X_1, X_2$  sont des **variables aléatoires discrètes** de supports contenus dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  :

$$X_0(\Omega) = \{k \mid k \in \mathbb{N}\}, \quad X_1(\Omega) = \left\{ \frac{k}{10} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, \quad X_2(\Omega) = \left\{ \frac{k}{100} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Contrairement à  $X_0, X_1$  et  $X_2$ , la variable  $X$  est une **variable aléatoire continue** car elle prend ses valeurs dans un intervalle (ensemble continu), en l'occurrence  $X(\Omega) = ]0, +\infty[$ .

Si l'on "extrapole" les sommets des rectangles du dernier histogramme, on peut tracer la courbe d'une certaine fonction  $f_X$  associée à  $X$ .

On dit que  $f_X$  est une **densité de probabilité** de  $X$  et que  $X$  est une **variable aléatoire continue à densité**.

Dans notre cas  $f_X$  est la fonction  $f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$

**Moralité :** Parmi toutes les variables aléatoires continues, il en est certaine que l'on sait étudier mieux que les autres. Il s'agit des variables aléatoires continues à densité et c'est le cas de  $X$ .

## 7.1 Variable aléatoire à densité

### 7.1.1 Densité de probabilité et variables à densité

#### DÉFINITION 7.1 (d.d.p)

Une fonction  $f$  est une **densité de probabilité (d.d.p)** si elle vérifie les conditions suivantes :

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$  c-à-d  $f$  est une fonction à valeurs positives.
- (2)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en un nombre fini de points
- (3) l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1.

**EXERCICE 7.1.** Vérifier que la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une d.d.p.

#### DÉFINITION 7.2 (variable aléatoire à densité)

Une variable aléatoire continue  $X$  de support  $X(\Omega) = I$  (intervalle réel) est une **variable aléatoire à densité** s'il existe une fonction densité  $f$  telle que :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

#### REMARQUE 7.1.

On dit bien **une** d.d.p de  $X$  et non **la** d.d.p de  $X$ . En effet, si l'on modifie une d.d.p de  $X$  en un nombre fini de point la fonction modifiée reste une d.d.p de  $X$ . Cependant dans les cas où plusieurs variables sont en jeu nous écrivons  $f_X$  pour désigner une d.d.p de  $X$  lorsque nous voudrions bien spécifier de quelle d.d.p nous parlons.

#### PROPRIÉTÉ 7.3

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, de densité  $f$ .

1. Pour tout  $x$  réel, on a :  $P(X = x) = 0$
2. Pour tout  $x$  réel, on a :  $P(X < x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
3. Pour tout  $x$  réel, on a :  $P(X > x) = P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$
4. Quelque soient les réels  $a$  et  $b$  (avec  $a < b$ ), on a :

$$\left. \begin{array}{l} P(a < X < b) \\ P(a \leq X < b) \\ P(a < X \leq b) \\ P(a \leq X \leq b) \end{array} \right\} = \int_a^b f(t) dt$$

#### REMARQUE 7.2.

On notera donc que pour une variable aléatoire à densité les événements  $(a \leq X \leq b)$ ,  $(a < X \leq b)$ ,  $(a \leq X < b)$  et  $(a < X < b)$  ont tous la même probabilité.



Attention ce n'est pas du tout le cas si la variable est discrète !

### 7.1.2 Fonction de répartition et variables à densité

#### DÉFINITION 7.4 (Fonction de répartition)

Soit  $X$  une variable aléatoire (discrète ou continue).

La fonction de répartition de  $X$  est la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

$\rightsquigarrow$  on dit parfois que  $F_X$  est la loi de  $X$ .

**REMARQUE 7.3.** 1. La fonction de répartition d'une variable aléatoire existe toujours et est unique. Alors qu'une variable n'admet pas forcément une d.d.p.

2. Cette définition est centrale dans l'étude des variable aléatoire à densité, il faut donc impérativement la connaître et apprendre à la maîtriser au plus vite.

**Exemple :** La fonction de répartition d'une variable de loi certaine  $X = a$  est donnée par  $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

#### THÉORÈME 7.5

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $F_X$  sa fonction de répartition.

Alors :

- $F_X$  est croissante et continue à droite en tout point de  $\mathbb{R}$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

**Si de plus  $X$  est une variable aléatoire à densité et  $f$  est une densité de  $X$ , alors :**

- $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et définie par  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
- $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F_X' = f$  là où cela a un sens.  
En tout point  $x$  où  $f$  est continue

**EXERCICE 7.2.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité de support  $[0, +\infty[$  de densité  $f$  définie par  $f(t) = \begin{cases} \frac{2e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Vérifier que  $f$  est bien une d.d.p.

2. Déterminer  $F_X(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**REMARQUE 7.4.**

Nous venons de voir comment calculer la fonction de répartition d'une variable à densité. Le théorème suivant permet réciproquement de justifier qu'une variable est à densité à condition d'avoir sa fonction de répartition.

#### THÉORÈME 7.6 (Condition suffisante pour être à densité)

Soit  $X$  une variable aléatoire continue et  $F_X$  sa fonction de répartition.

- Si  $\begin{cases} (1) & F_X \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ (2) & F_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ & \text{sauf en un nombre fini de points} \end{cases} \implies X \text{ admet une d.d.p.}$
- De plus la fonction  $f = F_X'$  est une densité de  $X$ .  
en tout point où  $F_X$  est dérivable

**EXERCICE 7.3.** Soit  $X$  la variable aléatoire de fonction de répartition  $F_X$  donnée par  $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ .  
Montrer que  $X$  est une variable aléatoire à densité et trouver une densité  $f$  de  $X$ .

## 7.2 Transferts de variables aléatoires

En ce qui concerne les lois uniformes et exponentielles on se rapportera à la dernière section de ce chapitre où sont résumées les principales caractéristiques de ces lois usuelles continues. En particulier les fonctions de répartition de ces lois.

### Trouver la loi de $Y = X^2$

Il faut passer par la fonction de répartition de  $X$  en remarquant que pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

### Trouver la loi de $Y = |X|$

Il faut passer par la fonction de répartition de  $X$  en remarquant que pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) \\ &= P(-x \leq X \leq x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \end{aligned}$$

**EXERCICE 7.4.** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}[-1, 1]$   
Donner la loi de  $Y = X^2$

**EXERCICE 7.6.** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1]$ .  
Montrer que  $Y = |X|$  est une variable aléatoire à densité et déterminez sa densité.

### Trouver la loi de $Y = e^X$

Il faut passer par la fonction de répartition de  $X$  en remarquant que pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(e^X \leq x) \\ &= P(X \leq \ln(x)) \\ &= F_X(\ln(x)) \end{aligned}$$

### Trouver la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$

Il faut passer par la fonction de répartition de  $X$  en remarquant que pour tout entier  $k$ ,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lfloor X \rfloor = k) \\ &= P(k \leq X < k+1) \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) \end{aligned}$$

**EXERCICE 7.5.** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .  
Montrer que  $Y = e^X$  est une variable aléatoire à densité et déterminez sa densité.

**EXERCICE 7.7.** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}[1, n+1]$ .  
Reconnaitre la loi de  $Y = \lfloor X \rfloor$ .

**EXERCICE 7.8** (A savoir refaire).

Soit  $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ , où  $\lambda > 0$  et  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ .

1. Montrer que  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ .
2. Interpréter la ligne de commande suivante `-1/lambda*np.log(1 - rd.random())`.

### THÉORÈME 7.7 (Théorème d'inversion : hors programme)

Plus généralement, soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de répartition  $F_X$  est strictement croissante d'un intervalle  $]a; b[$  sur  $]0; 1[$ .

Alors :

- $F_X$  réalise une bijection de  $]a; b[$  sur  $]0; 1[$
- si  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ , alors la variable  $V = F_X^{-1}(U)$  suit la même loi que  $X$ .

## 7.3 Moments d'une variable aléatoire à densité

### 7.3.1 Espérance

#### DÉFINITION 7.8

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, de densité  $f$ .

On dit que  $X$  **admet une espérance** si  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$  **converge absolument**. On note alors :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

**EXERCICE 7.9.** Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \begin{cases} 6t(1-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Vérifier que  $f$  est une densité.
2. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.

**EXERCICE 7.10.** Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Vérifier que  $f$  est une densité.
2. Montrer que  $X$  n'admet pas d'espérance.

#### PROPRIÉTÉ 7.9 (linéarité de l'espérance - Admise)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à densité admettant chacune une espérance. Alors, quelque soient les réels  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\lambda X + \mu Y$  admet une espérance. De plus :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

#### REMARQUES 7.1.

La propriété se généralise à  $n$  variables :  $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$ .

#### THÉORÈME 7.10 (théorème de transfert - admis)

Si  $X$  est une VA admettant une densité  $f$  nulle en dehors de  $]a, b[$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) et si  $g$  est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur  $]a, b[$

Alors la variable  $Y = g(X)$  admet une espérance Ssi l'intégrale  $\int_a^b g(t)f(t)dt$  **converge absolument** . et dans ce cas :

$$E(g(X)) = \int_a^b g(t)f(t)dt.$$

#### REMARQUE 7.5.

- A noter que l'intégrale précédente peut être une intégrale généralisée ou non suivant la fonction de densité  $f$ .
- Lorsqu'on définit par composée de  $g$  et  $X$ , une variable aléatoire  $g \circ X$ , notée  $g(X)$ ,  $g(X)$  n'est pas nécessairement à densité (elle peut être discrète si par exemple  $g(x) = \lfloor x \rfloor$ ).

**EXERCICE 7.11.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 c'est à dire dont la densité est la fonction  $f_X$  définie par  $f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

La variable aléatoire  $T = \frac{1}{1 + e^{-X}}$  admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

### 7.3.2 Variance

#### DÉFINITION 7.11

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, de densité  $f$  telle que  $X$  admet une espérance.

On dit que  $X$  **admet une variance** si  $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$  converge. On note alors

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$$

On appelle alors **écart type** de  $X$  le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

#### REMARQUE 7.6.

Comme pour les variables discrètes nous ne calculerons jamais (ou alors très rarement) la variance à l'aide de cette définition. Nous utiliserons généralement la formule de Koenig-Huygens.

#### THÉORÈME 7.12 (formule de Koenig-Huygens)

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité;

Si  $X^2$  admet une espérance. Alors  $X$  admet une variance et on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

#### REMARQUE 7.7.

Il sera donc en général nécessaire d'appliquer le théorème de transfert à la variable  $X^2$  et de montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$  converge (la fonction à intégrer étant positive) pour que  $X$  admette une variance.

**EXERCICE 7.12.** Soit  $f$  une fonction nulle sur  $]0; +\infty[$ , continue sur  $[0; +\infty[$  et telle que  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ .  
Montrer que  $f$  admet une espérance mais pas de variance.

**EXERCICE 7.13. Loi de Laplace** Soit  $X$  une variable suivant la loi de Laplace de paramètre 2, c'est à dire ayant pour densité la fonction :  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ .  
Déterminer, s'ils existent la variance et l'écart type de  $X$ .

#### REMARQUE 7.8.

1. Les mêmes propriétés de la variance sont valables pour les variables à densité à savoir  $V(aX + b) = a^2 V(X)$  pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
2. De même on peut définir la covariance d'un couple de variables à densité et les propriétés de la covariance restent valides. Par exemple  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ,  $cov(X, Y) = 0$  et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  pour tout couple  $(X, Y)$  de variables indépendantes.

#### DÉFINITION 7.13

Soit  $r$ , un entier naturel non nul et  $X$  une variable aléatoire à densité, de densité  $f$ . On dit que  $X$  **admet un moment d'ordre  $r$**  si  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$  converge **absolument**. On note alors

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$$

#### REMARQUE 7.9.

En reformulant,  $X$  admet une variance si et seulement si  $X$  admet un moment d'ordre 2.

## 7.4 Lois continues usuelles

### Lois uniformes $\mathcal{U}([a; b])$ ( $a < b$ )

Elles traduisent une situation d'équiprobabilité.

Python : `rd.random(a, b, (r, s))` simule une matrice  $r \times s$  de variables indépendantes suivant la loi  $\mathcal{U}([a; b])$

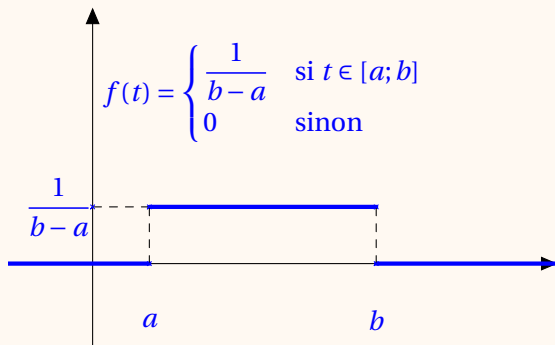
#### PROPRIÉTÉ 7.14

##### Support

$$X(\Omega) = [a; b]$$

##### Densité

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

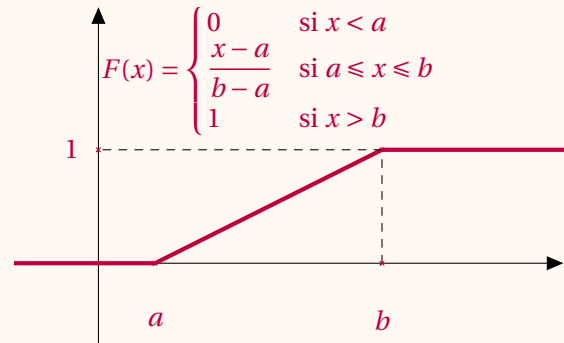


##### Espérance & Variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

##### Fct de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



#### PROPRIÉTÉ 7.15 (Transformations affines)

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1] \iff Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$$

### EXERCICE 7.14. Maximum de lois uniformes indépendantes

Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme  $\mathcal{U}[0; 1]$ .

On note  $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  et  $F_n$  sa fonction de répartition.

1. Déterminer une fonction Python permettant de simuler la variable  $Z_n$ .
2. Déterminer  $F_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
3. En déduire que  $Z_n$  est une variable à densité puis déterminer une densité de  $Z_n$ .
4. Montrer que  $Z_n$  admet une espérance et la calculer.
5. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n)$ . Le résultat vous surprend-il ?

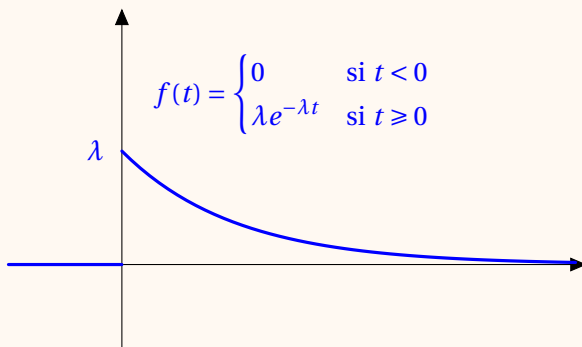
**Lois exponentielles**  $\mathcal{E}(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ )

Les lois exponentielles traduisent des situations telles que la durée de vie d'un atome radioactif, la durée de refroidissement d'un métal, le temps d'attente à un guichet....

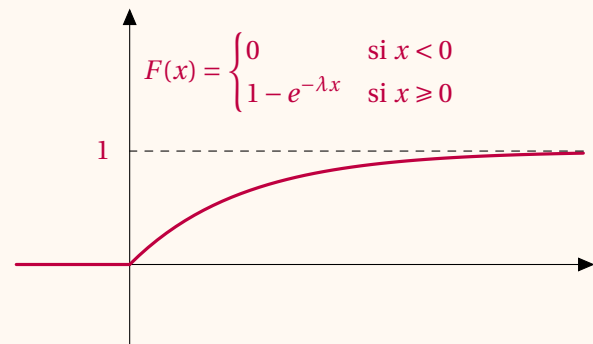
Python : `rd.exponential(lambda, (r, s))` renvoie la simulation d'une matrice  $r \times s$  de variables indépendantes suivant la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

**PROPRIÉTÉ 7.16****Support**

$$X(\Omega) = \mathbb{R}^+$$

**Densité****Espérance & Variance**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Fct de répartition**

Ce sont les seules variables aléatoires à densité à être **sans mémoire** : Pour tout réels positifs  $t$  et  $t_0$ ,

$$P_{(X > t_0)}(X > t_0 + t) = P(X > t)$$

**REMARQUE 7.10.**

Parmi les lois discrètes, la loi géométrique est également une loi sans mémoire.

**EXERCICE 7.15.** Soit  $Y = -\ln(1 - U)$  où  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ .

- Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  puis montrer que  $Y$  admet une densité et calculer.
- Déterminer une fonction Python permettant de simuler une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

**EXERCICE 7.16. Minimum de lois exponentielles indépendantes**

Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .

On note  $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$  et  $F_n$  sa fonction de répartition.

- Ecrire une fonction Python permettant de simuler la variable  $Z_n$ .
- Déterminer  $F_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- En déduire que  $Z_n$  est une variable à densité puis déterminer une densité de  $Z_n$ .

**Lois normales**  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 

Nous consacrerons un chapitre aux lois normales qui sont les dernières lois usuelles à densité au programme.